Capitolo 1

Funzioni reali di due variabili reali

In questo capitolo estenderemo alcune proprietà delle funzioni reali di una variabile reale alle funzioni reali di due variabili reali.

Ricordiamo che $\mathbb{R}^2$ denota l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali e che un punto generico di $\mathbb{R}^2$ sarà indicato con $P = (x, y)$. Analogamente, $\mathbb{R}^3$ denota l'insieme delle terne ordinate di numeri reali e un punto generico punto di $\mathbb{R}^3$ sarà indicato con $P = (x, y, z)$.

1.1 Nozioni di topologia in $\mathbb{R}^2$

Siano $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x, y)$ due punti di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 1 *Si chiama distanza (euclidea) tra P e P_0 il numero*

$$d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Sia r un numero positivo.

Definizione 2 *L'insieme*

$$I_r(P_0) = B(P_0, r) = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, P_0) < r\}$$

si chiama intorno circolare di P_0 di raggio r.

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 3 *Diremo che P_0 è interno ad A se $P_0 \in A$ e esiste $r > 0$ tale che $I_r(P_0) \subseteq A$.*

L'insieme dei punti interni ad A è detto interno di A e si indica con $int(A)$ o con $\overset{\circ}{A}$.

Definizione 4 *Un insieme è detto aperto se è vuoto, oppure se non è vuoto e coincide con il proprio interno.*
Un insieme è detto chiuso se il suo complementare è aperto.

Definizione 5 *Diremo che P_0 è un punto di accumulazione per A se in ogni suo intorno ci sono elementi di A distinti da P_0.*

L'insieme dei punti di accumulazione per A è detto derivato di A e si indica con DA.
Dunque

$$P_0 \in DA \iff \forall r > 0, I_r(P_0) \cap (A \setminus \{P_0\}) \neq \emptyset.$$

Definizione 6 *Diremo che P_0 è un punto di frontiera per A se in ogni suo intorno ci sono elementi di A ed elementi di $\mathbb{R}^2 \setminus A$.*

L'insieme dei punti di frontiera per A è detto frontiera di A e si indica con FA o con ∂A.
Si può dimostrare che

$$A \text{ è chiuso} \iff DA \subseteq A$$

o, equivalentemente,

$$A \text{ è chiuso} \iff FA \subseteq A.$$

Infine

Definizione 7 *L'insieme A è detto limitato se esistono $P_0 \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ tali che $A \subseteq I_r(P_0)$.*

ESEMPIO 1 1. L'insieme $A = [-1, 3] \times [-2, 1]$ è chiuso e limitato.

La sua frontiera è l'unione dei quattro lati del rettangolo.

2 Il triangolo di vertici $(0, 0)$ $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$ è chiuso e limitato. La sua frontiera è l'unione dei lati del triangolo.

3. Siano P_0 un punto di $\mathbb{R}^2$ e $r > 0$. L'intorno circolare $I_r(P_0)$ è aperto e limitato. La sua frontiera è la circonferenza del piano di centro P_0 e raggio r.

L'insieme
$$\left\{P \in \mathbb{R}^2 : \quad d(P, P_0) \leq r\right\}$$
è chiuso e limitato.La sua frontiera è la circonferenza del piano di centro P_0 e raggio r.

L'insieme
$$\left\{P \in \mathbb{R}^2 : \quad d(P, P_0) \geq r\right\}$$
è chiuso e non limitato. La sua frontiera è la circonferenza del piano di centro P_0 e raggio r.

Infine, l'insieme
$$\left\{P \in \mathbb{R}^2 : \quad d(P, P_0) > r\right\}$$
è aperto e non limitato. La sua frontiera è la circonferenza del piano di centro P_0 e raggio r.

1.2 Generalità sulle funzioni reali di due variabili reali

Una funzione reale di due variabili reali è una funzione

$$f : A \to \mathbb{R}$$

con A sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^2$. L'insieme

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, \quad z = f(x, y)\}$$

si chiama grafico di f.
Si indicherà poi, come di consueto, con $f(A)$ l'immagine di f.
Come per le funzioni di una variabile, alcune proprietà di $f(A)$ vengono attribuite alla funzione: si parla, dunque, di funzione limitata se l'insieme $f(A)$ è limitato, e analogamente si introducono i concetti di $\inf_A f$ e $\sup_A f$ e gli estremi assoluti della funzione, ovvero $\min_A f$ e $\max_A f$. In particolare, se $\max_A f = f(x_0, y_0)$ ($\min_A f = f(x_0, y_0)$), il punto (x_0, y_0) è detto punto di massimo (minimo) assoluto (o globale).

Esempio 2 Sia $k \in \mathbb{R}$.
La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x, y) = k \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

si chiama funzione costante. Il suo grafico è l'insieme

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = k\}$$

cioè è l'insieme formato dai punti del piano (parallelo al piano $\vec{x}\vec{y}$) di equazione $z = k$.

-

Esempio 3 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita dalla legge

$$f(x, y) = x \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

f si chiama funzione proiezione sull'asse $\vec{x}$. Il suo grafico è l'insieme

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x\}$$

cioè è l'insieme formato dai punti del piano di equazione $z = x$.
Analogamente, la funzione definita dalla legge

$$f(x, y) = y \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

si chiama funzione proiezione sull'asse $\vec{y}$. Il suo grafico è l'insieme formato dai punti del piano di equazione $z = y$.

ESEMPIO 4 Se $a, b \in \mathbb{R}$, la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x, y) = ax + by \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

si chiama funzione lineare. Il suo grafico è l'insieme

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = ax + by\}$$

cioè è l'insieme formato dai punti del piano di equazione $z = ax + by$.

ESEMPIO 5 Assegnata la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

il suo grafico è l'insieme formato dai punti del cono di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ESERCIZIO 1 *Determinare il dominio della funzione definita dalla legge* $f(x, y) = \sqrt{x - y}$.

Il dominio di f è l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x\}$ cioè il semipiano di equazione $y \leq x$.

ESERCIZIO 2 *Determinare il dominio delle funzioni definite dalle seguenti leggi:*

$$f_1(x, y) = x\sqrt{y - 1},$$
$$f_2(x, y) = y^2 \log x,$$
$$f_3(x, y) = \frac{1}{y}\ \sqrt[4]{xy},$$
$$f_4(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1},$$
$$f_5(x, y) = \log[(x - 1)(y - 2)].$$

1.3 Limiti delle funzioni di due variabili

Possiamo estendere alle funzioni di due variabili la nozione di limite introdotta per le funzioni di una variabile.

Siano dati una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e un punto $(x_0, y_0) \in DA$.

Definizione 8 *Diremo che f converge al numero reale l per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ e scriveremo*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$$

se è verificata la seguente condizione:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : (x, y) \in I_\delta(x_0, y_0) \cap A, (x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$$

Esempio 6 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione costante $f(x, y) = k \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = k.$$

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ si ha $|f(x, y) - k| = 0\ \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Esempio 7 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione proiezione sull'asse $\vec{x}$ data da $f(x, y) = x \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = x_0.$$

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, la diseguaglianza $|f(x, y) - x_0| < \varepsilon$ è equivalente a $|x - x_0| < \varepsilon$.

Se $(x, y) \in I_\varepsilon(x_0, y_0)$ si ha

$$|x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$$

da cui segue la tesi con $\delta = \varepsilon$.

In modo analogo si prova che, se f è la funzione proiezione sull'asse $\vec{y}$, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = y_0.$$

Possiamo estendere alle funzioni di due variabili anche la nozione di funzione divergente positivamente (negativamente).

Definizione 9 *Diremo che la funzione f diverge positivamente (negativamente) per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ e scriveremo*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = +\infty \quad (-\infty)$$

se è verificata la seguente condizione:

$$\forall\ k > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall (x, y) \in I_\delta(x_0, y_0) \cap A, (x, y) \neq (x_0, y_0)$$
$$\Downarrow$$
$$f(x, y) > k \quad (f(x, y) < -k).$$

Esempio 8 Proviamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty.$$

Basta osservare che, fissato $k > 0$

$$\frac{1}{x^2 + y^2} > k \iff (x, y) \neq (0, 0) \wedge x^2 + y^2 < \frac{1}{k}$$

$$\iff \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{\sqrt{k}} \wedge (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\iff (x, y) \in I_{\frac{1}{\sqrt{k}}}(0, 0) \wedge (x, y) \neq (0, 0).$$

Definizione 10 *La funzione f è detta regolare al tendere di (x, y) a (x_0, y_0) se è convergente o divergente.*

Continuano a valere, per i limiti delle funzioni di due variabili, tutti i risultati stabiliti per i limiti delle funzioni di una variabile. Valgono, dunque, i teoremi di unicità del limite, della permanenza del segno, di confronto e i teoremi sulle operazioni con i limiti.

Ad esempio, si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} (x+1)(y^2+xy) = 0;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+2}{x^2+2y^2+1} = 2.$$

Vale, inoltre, il teorema sul limite delle funzioni composte, che per semplicità enunciamo solo in un caso particolare.

Teorema 1 *Siano: A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) un punto di accumulazione per A, I un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $t_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per I. Siano date due funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : A \to I$, e sia $F : A \to \mathbb{R}$ la funzione composta data da $F(x,y) = f(g(x,y))$. Supponiamo che:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = t_0$$

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora, si ha

$$lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = l$$

Esempio 9 Calcoliamo il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Risulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$$

e

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 0.$$

Applichiamo il Teorema 1 con $g(x,y) = x^2+y^2$ e $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$ $(t \neq 0)$ e troviamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1.$$

ESERCIZIO 3 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^2}-1}{xy^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\log(1+x(y-1))}{x^2(y-1)}.$$

Ricordiamo ora che dati una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e un sottoinsieme non vuoto $E \subseteq A$, si chiama restrizione di f ad E la funzione

$$f_{|E} : E \to \mathbb{R}$$

definita da

$$f_{|E}(x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in E.$$

Vale il seguente teorema sul limite della restrizione.

Teorema 2 *Siano A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in DA$, E un sottoinsieme non vuoto di A tale che $(x_0, y_0) \in DE$, f una funzione reale definita in A. Se*

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \bar{\mathbb{R}} \tag{1.1}$$

Allora, si ha

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{|E}(x,y) = l \in \bar{\mathbb{R}}. \tag{1.2}$$

Dimostrazione Supponiamo che $l = +\infty$. Bisogna provare che

$$\forall k > 0 \quad \exists \delta > 0 : f_{|E}(x,y) > k \quad \forall (x,y) \in E \cap I_\delta(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$$

Dall'ipotesi, fissato $k > 0$ esiste $\delta_1 > 0$ tale che

$$f(x,y) > k \quad \forall (x,y) \in A \cap I_{\delta_1}(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}.$$

Ovviamente, si ha anche

$$f(x,y) > k \quad \forall (x,y) \in E \cap I_{\delta_1}(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$$

e quindi si ha la tesi prendendo $\delta = \delta_1$ e osservando che $f_{|E}(x,y) = f(x,y)$ $\forall (x,y) \in E$.

Osservazione 1 La condizione (1.1) è condizione necessaria per l'esistenza del limite e può essere usata per provare che il limite di f al tendere di (x,y) a (x_0,y_0) non esiste. Supponiamo infatti che esistano due sottoinsiemi E_1, E_2 di A tali che

$$(x_0,y_0) \in DE_1 \cap DE_2$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{|E_1}(x,y) \neq \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{|E_2}(x,y),$$

allora il

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

non esiste.

Esempio 11 Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Proviamo che il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

non esiste.
Il limite dato si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Consideriamo l'insieme

$$E_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \neq 0\}.$$

Si ha $(0,0) \in DE_0$ e

$$f_{|E_0}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in E_0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|E_0}(x,y) = 0.$$

Consideriamo ora l'insieme

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = x\}.$$

Si ha $(0,0) \in DE_1$ e

$$f_{|E_1}(x,y) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in E_1 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|E_1}(x,y) = \frac{1}{2}.$$

Dal Teorema 2 segue che il limite di f non esiste.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Proviamo a calcolare il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$.
Consideriamo gli insiemi E_0 ed E_1 dell'Esempio 10; si ha

$$f_{|E_0}(x,y) = 0 \qquad \forall (x,y) \in E_0 \ \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|E_0}(x,y) = 0;$$

$$f_{|E_1}(x,y) = \frac{x^3}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}x \quad \forall (x,y) \in E_1 \ \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|E_1}(x,y) = 0.$$

Più in generale, consideriamo, per ogni $m \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$E_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = mx\}.$$

Si ha $(0,0) \in DE_m$ e

$$f_{|E_m}(x,y) = \frac{mx^3}{m^2x^2+x^2} = \frac{m}{1+m^2}x \quad \forall (x,y) \in E_m \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|E_m}(x,y) = 0.$$

Con queste osservazioni possiamo <u>solo</u> dire che, se esiste il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$, esso vale 0.
Per provarlo possiamo osservare che vale la seguente disuguaglianza

$$0 \leq |f(x,y)| = |x|\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x| \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

e dato che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0,$$

applicando il Teorema dei carabinieri segue che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$$

che equivale a
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Osservazione 2 Nell'esempio precedente abbiamo usato la disuguaglianza che
$$\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1, \qquad \forall (x,y) \neq (0,0).$$
Altre diseguaglianze utili da usare nel calcolo dei limiti sono:
$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0); \tag{1.3}$$
$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad \forall (x,y) \neq (0,0). \tag{1.4}$$
Per la verifica della disuguaglianza (1.4) osserviamo che
$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = |x|^2 - 2|xy| + |y|^2$$
implica
$$2|xy| \leq x^2 + y^2.$$

Esempio 11 Sia
$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$
la funzione definita da
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Calcoliamo il
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Introdotti gli insiemi E_0 e E_m come nell'Esempio 10, si ha
$$f_{|E_0}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in E_0 \;\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|E_0}(x,y) = 0;$$
$$f_{|E_m}(x,y) = \frac{m}{\sqrt[3]{1+m^2}} x^{\frac{4}{3}} \quad \forall (x,y) \in E_0 \;\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|E_m}(x,y) = 0.$$

Verifichiamo che il limite vale 0. Applicando la disuguaglianza (1.4) si ha, per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$

$$0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$$

e dato che il limite dell'ultimo membro vale 0, per il Teorema dei carabinieri segue che il limite di f vale 0.

Esempio 12 Sia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad y \neq x^2 \\ 1 & \text{se} \quad y = x^2 \end{cases} \tag{1.5}$$

Per ogni $m \in \mathbb{R}$ sia E_m l'insieme introdotto nell'Esempio 10. Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|E_m}(x, y) = 0.$$

Posto poi

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = x^2\}$$

si ha , evidentemente,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|E}(x, y) = 1$$

e quindi il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ non esiste.

1.4 Funzioni continue

Estendiamo la nozione di continuità alle funzioni di due variabili.

Sia f una funzione reale definita in un sottoinsieme non vuoto A di $\mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in A$.

Definizione 11 *La funzione f è detta continua nel punto (x_0, y_0) se*
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (x, y) \in A \cap I_\delta(x_0, y_0) \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$

Come per le funzioni di una variabile, vale la seguente

Proposition 1 *i) Se* $(x_0, y_0) \in A \cap DA$*, allora*

$$f \text{ continua in } \quad (x_0, y_0) \iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$

ii) Se $(x_0, y_0) \in A$ *e* $(x_0, y_0) \notin DA$*, allora*

$$f \text{ è continua in } \quad (x_0, y_0).$$

Definizione 12 *La funzione* f *è detta continua in* A *se è continua in ogni punto di* A*.*

Valgono, per le funzioni continue di due variabili, gli stessi risultati stabiliti per le funzioni di una variabile. In particolare, segnaliamo i seguenti:

1. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ continue in un punto $(x_0, y_0) \in A$.
   Allora, $f + g, fg, |f|$ sono continue in (x_0, y_0).
   Se, inoltre, $g(x_0, y_0) \neq 0$, allora $\frac{1}{g}, \frac{f}{g}$ sono continue in (x_0, y_0).
2. Siano date una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e due funzioni $g_1, g_2 : (a, b) \to \mathbb{R}$ continue in un punto $t_0 \in (a, b)$ e tali che $(g_1(t), g_2(t)) \in A \ \forall t \in (a, b)$. Se la funzione f è continua nel punto $(g_1(t_0), g_2(t_0))$ allora la funzione $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ definita da $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ è continua in t_0.
3. **Teorema di Weierstrass** Ogni funzione continua in un insieme chiuso e limitato è ivi dotata di massimo e minimo assoluti.

1.5 Calcolo differenziale

1.5.1 Derivate parziali

Siano A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^2$ e f una funzione reale definita in A. Sia (x_0, y_0) un punto interno ad A, esiste quindi $\delta > 0$ tale che $I_\delta(x_0, y_0) \subseteq A$. Consideriamo la funzione (della sola variabile x)

$$g :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$$

definita da

$$g(x) = f(x, y_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Diamo la seguente

Definizione 13 *Se la funzione g è derivabile nel punto x_0, diremo che f è derivabile parzialmente rispetto alla x nel punto (x_0, y_0). In tal caso, il numero $g'(x_0)$ si chiama derivata parziale di f rispetto alla x nel punto (x_0, y_0) e si indica con uno dei simboli $f_x(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Dunque, f è derivabile parzialmente rispetto ad x in (x_0, y_0) se esiste finito il*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

o, equivalentemente, il

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e si pone $f_x(x_0, y_0)$ uguale al valore di tali limiti.

Analogamente, consideriamo la funzione (della sola variabile y)

$$h :]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\to \mathbb{R}$$

definita da

$$h(y) = f(x_0, y) \quad \forall y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[.$$

Diamo la seguente

Definizione 14 *Se la funzione h è derivabile nel punto y_0, diremo che f è derivabile parzialmente rhispetto alla y nel punto (x_0, y_0). In tal caso, il numero $h'(y_0)$ si chiama derivata parziale di f rispetto alla y nel punto (x_0, y_0) e si indica con uno dei simboli $f_y(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Dunque, f è derivabile parzialmente rispetto ad y in (x_0, y_0) se esiste finito il*

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

o, equivalentemente, il

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e si pone $f_y(x_0, y_0)$ *uguale al valore di tali limiti.*

Definizione 15 *Se* f *è dotata di derivate parziali prime in* (x_0, y_0) *il vettore* $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ *si chiama gradiente di* f *nel punto* (x_0, y_0)*.*

Esempio 13 Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = 4x^5y^3 - x^4 + y^2 - 2x + 6y$, allora, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$f_x(x, y) = 20x^4y^3 - 4x^3 - 2, \qquad f_y(x, y) = 12x^5y^2 + 2y + 6$$

e quindi

$$\nabla f(1, 0) = (-6, 6).$$

Esempio 14 Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, studiamo la derivabilità nel punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Poiché la funzione $f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$ non è derivabile nel punto $x = 0$, f non è dotata di derivata parziale rispetto a x nel punto $(0, 0)$. In modo analogo si prova che f non è dotata di derivata parziale rispetto a y nel punto $(0, 0)$.

Invece, per ogni punto $(x, y) \neq (0, 0)$, esistono le due derivate parziali e si ha

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Esempio 15 Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = |xy|.$$

i) Studiamo la derivabilità di f nel punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
Poiché si ha

$$f(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

f è dotata di derivata parziale rispetto a x nel punto $(0, 0)$ e si ha $f_x(0, 0) = 0$. In modo analogo si prova che $f_y(0, 0) = 0$.

ii) Studiamo la derivabilità di f nel punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Risulta:

$$f(x, 1) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \nexists f_x(0, 1);$$

$$f(0, y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists f_y(0, 1) = 0.$$

iii) Studiamo la derivabilità di f nel punto $(x_0, y_0) = (-2, 0)$. Risulta:

$$f(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists f_x(-2, 0) = 0;$$

$$f(-2, y) = |-2y| = 2|y| \quad \forall y \in \mathbf{R} \Rightarrow \nexists f_y(-2, 0).$$

iv) In generale possiamo dire, procedendo analogamente, che se $x_0 \neq 0$ allora

$$\exists f_x(x_0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \nexists f_y(x_0, 0)$$

e se $y_0 \neq 0$ allora

$$\nexists f_y(0, y_0) \quad \text{e} \quad \exists f_y(0, y_0) = 0.$$

v) Infine, se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $(x, y) \neq (0, 0)$, ricordando che la derivata della funzione di una variabile

$$t \to |t|$$

è

$$\frac{|t|}{t} = \frac{t}{|t|} \qquad \forall t \neq 0,$$

si ha

$$\exists \frac{\partial}{\partial x}(|xy|) = \frac{\partial}{\partial x}(|y|\ |x|) = |y| D(|x|) = |y| \frac{x}{|x|},$$

$$\exists \frac{\partial}{\partial y}(|xy|) = |x| D(|y|) = |x| \frac{y}{|y|}.$$

Esercizio 4 *Scrivere il gradiente delle seguenti funzioni nei punti indicati.*

$$f(x,y) = x^3y^4 - 2x + 3xy^3, \qquad (x_0,y_0) = (2,1),$$

$$(x,y) = \frac{2xy+y}{x^2+2y}, \qquad (x_0,y_0) = (-1,1),$$

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{y}, \qquad (x_0,y_0) = (\tfrac{\pi}{2},\tfrac{1}{2}),$$

$$f(x,y) = \log x + \arctan \tfrac{y}{x}, \qquad (x_0,y_0) = (1,1).$$

Adesso vogliamo definire le derivate parziali seconde. Supponiamo che il dominio A della funzione f sia aperto e diamo la seguente

Definizione 16 *Diremo che f è derivabile rispetto a x (rispetto a y) in A se è derivabile rispetto a x (rispetto a y) in ogni punto di A. In tal caso, la funzione che ad ogni $(x,y) \in A$ associa $f_x(x,y)$ ($f_y(x,y)$) si chiama funzione derivata parziale prima rispetto a x (a y).*

ii) Se f è derivabile rispetto a x in A e la funzione $f_x(x,y)$ è derivabile rispetto a x (a y) in un punto $(x_0,y_0) \in A$, diremo che f è dotata di derivata seconda pura rispetto a x (derivata seconda mista rispetto a x e y) nel punto (x_0,y_0). Il numero

$$f_{xx}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial x} f_x(x_0,y_0)$$

$$f_{xy}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial y} f_x(x_0,y_0)$$

si chiama derivata seconda pura rispetto a x (derivata seconda mista rispetto a x e y) di f nel punto (x_0,y_0).
Analogamente, se f è derivabile rispetto a y in A e la funzione $f_y(x,y)$ è derivabile rispetto a y (a x) in un punto $(x_0,y_0) \in A$, diremo che f è dotata di derivata seconda pura rispetto a y (derivata seconda mista rispetto a y e x) nel punto (x_0,y_0). Il numero

$$f_{yy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial y} f_y(x_0, y_0)$$

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial y} f_x(x_0, y_0)$$

si chiama derivata seconda pura rispetto a y (derivata seconda mista rispetto a y e x) di f nel punto (x_0, y_0).

iii) *Diremo che f è dotata di derivata seconda pura rispetto a x (mista rispetto a x e y, pura rispetto a y, mista rispetto a y e x) in A se è dotata di derivata seconda pura rispetto a x (mista rispetto a x e y, pura rispetto a y, mista rispetto a y e x) in ogni punto di A. In tal caso, la funzione che ad ogni $(x, y) \in A$ associa $f_{xx}(x, y)$ $(f_{yy}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y))$ si chiama funzione derivata parziale seconda pura rispetto a x (pura rispetto a y, mista rispetto a x e y, mista rispetto a y e x).*

Esempio 16 Sia data la funzione razionale intera $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^2 y - 3xy^3 + 2x^2 y^2 + xy \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

f è derivabile parzialmente rispetto a x e a y e si ha, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_x(x, y) = 2xy - 3y^3 + 4xy^2 + y, \quad f_y(x, y) = x^2 - 9xy^2 + 4x^2 y + x.$$

Le funzioni f_x ed f_y sono derivabili parzialmente rispetto a x e y e si ha, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{xx}(x, y) = 2y + 4y^2, \quad f_{xy}(x, y) = 2x - 9y^2 + 8xy + 1,$$

$$f_{yx}(x, y) = 2x - 9y^2 + 8xy + 1, \quad f_{yy}(x, y) = -18xy + 4x^2.$$

Nell' esempio precedente le derivate seconde miste coincidono; ci chiediamo: se esistono $f_{xy}(x, y)$ ed $f_{yx}(x, y)$, si ha sempre $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$? La risposta è, in generale, negativa, come prova il seguente esempio.

ESEMPIO 17 Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f è derivabile parzialmente rispetto a x e a y in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e si ha, in tali punti

$f_x(x_0,y_0) = y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$f_y(x,y) = -x\frac{y^4-x^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Studiamo la derivabilità di f nel punto $(x_0,y_0) = (0,0)$. Risulta:

$f(x,0) = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = 0$

$f(0,y) = 0 \Rightarrow f_y(0,0) = 0$

Studiamo l'esistenza delle derivate seconde miste di f nel punto $(x_0,y_0) = (0,0)$. Risulta:

$$f_x(0,y) = \begin{cases} -y, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

$$f_y(x,0) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

In definitiva, $f_x(0,y) = -y \ \forall y \in \mathbb{R}$ e $f_y(x,0) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Ne segue che

$\exists f_{xy}(0,0) = -1$ e $\exists f_{yx}(0,0) = 1$

quindi in questo caso $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

Vale, però, il seguente risultato, noto come Lemma di Schwarz.

Teorema 3 *Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione dotata in A di derivate seconde miste $f_{xy}(x,y)$ e $f_{yx}(x,y)$. Sia (x_0,y_0) un punto di A. Se le funzioni f_{xy} e f_{yx} sono continue nel punto (x_0,y_0), allora si ha*

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

1.5.2 Differenziabilità

Ricordiamo che per una funzione di una variabile $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ la derivabilità in un punto $c \in (a,b)$ implica la continuità di φ nel punto c. Possiamo chiederci se ciò valga anche per le funzioni di due variabili oppure se esistono funzioni di due variabili dotate, in un punto, delle derivate parziali prime, ma che non sono continue in tale punto. Consideriamo a tale scopo la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiamo la derivabilità di f nel punto $(0,0)$.

Poiché $f(x,0) = f(0,y) = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ la funzione è dotata di derivate parziali prime in $(0,0)$ e si ha

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

Tuttavia, f è discontinua nel punto $(0,0)$. Consideriamo infatti, per ogni $m \in \mathbb{R}$, l'insieme $E_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = mx\}$. Si ha $(0,0) \in DE_m$ e

$$f_{|E_m}(x,y) = \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2},$$

quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|E_m}(x,y) = \frac{m}{1+m^2}$$

e dato che questo limite dipende da m (quindi, varia al variare della restrizione) possiamo concludere che il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$ non esiste.

Cerchiamo allora una proprietà più forte della esistenza delle derivate parziali prime in un punto che implichi la continuità in tale punto. Ricordiamo, a questo proposito, che data una funzione di una variabile $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$, se $c \in (a,b)$ si ha che φ è derivabile in c se e solo se esiste un numero reale l tale che $\varphi(c+h) - \varphi(c) - lh = o(|h|)$ per $h \to 0$, ovvero, indicato come di consueto con $\Delta\varphi$ l'incremento di φ nel passaggio dal punto c al punto $c+h$, ovvero posto $\Delta\varphi = \varphi(c+h) - \varphi(c)$, si ha che φ è derivabile in c se e solo se $\Delta\varphi = lh + o(|h|)$ per $h \to 0$. La derivabilità in c consente, dunque, di approssimare $\Delta\varphi$ con la funzione lineare $h \to lh$ commettendo un errore che è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $|h|$ per $h \to 0$.

Ciò suggerisce la seguente

Definizione 17 *Siano f una funzione reale definita in un sottoinsieme non vuoto A di $\mathbb{R}^2$ e (x_0, y_0) un punto interno ad A.*

Diremo che f è differenziabile nel punto (x_0, y_0) se esistono due numeri reali l, m tali che

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = lh + mk + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad \text{per } (h, k) \to (0, 0).$$

Equivalentemente, f è differenziabile nel punto (x_0, y_0) se esistono due numeri reali l, m tali che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - [lh + mk]}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \tag{1.6}$$

Dato l'insieme $H = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 : (x_0 + h, y_0 + k) \in A\}$, la funzione

$$\Delta f : H \to \mathbb{R}$$

definita dalla legge

$$\Delta f(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0), \quad \forall (h, k) \in H$$

si chiama incremento della funzione nel passaggio da (x_0, y_0) a (x_0+h, y_0+k).

Se f è differenziabile nel punto (x_0, y_0), la funzione lineare

$$df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

definita dalla legge

$$df(x_0, y_0)(h, k) = lh + mk, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$$

si chiama differenziale di f nel punto (x_0, y_0).

Il seguente risultato risponde alla questione posta all'inizio di questo paragrafo.

Teorema 4 *Se f è differenziabile nel punto (x_0, y_0), allora si ha:*

i) f è continua nel punto (x_0, y_0);

ii) f è dotata di derivate parziali prime nel punto (x_0, y_0) e si ha

$$f_x(x_0, y_0) = l, \quad f_y(x_0, y_0) = m.$$

Dimostrazione

Proviamo la *i*). Osserviamo che f è continua nel punto (x_0, y_0) se e solo se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta f = 0.$$

Tenendo conto della (1.6) e del fatto evidente che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} (lh + mk) = 0$$

risulta

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta f = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[\frac{\Delta f - (lh + mk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \sqrt{h^2 + k^2} + (lh + mk) \right] = 0$$

come si voleva.

Proviamo la *ii*). Dimostriamo che $f_x(x_0, y_0) = l$ e quindi che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = l.$$

Posto

$$g(h, k) = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - (lh + mk)}{\sqrt{h^2 + k^2}}, \quad \forall (h, k) \in H \setminus \{(0, 0)\}$$

per l'ipotesi di differenziabilità si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} g(h, k) = 0.$$

Allora, anche la restrizione di g al seguente sottoinsieme di $H \setminus \{(0,0)$

$$\{(h,0) : h \in \mathbb{R}, h \neq 0\}$$

tende a 0 al tendere di (h,k) a $(0,0)$. Ciò implica che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) - lh}{|h|} = 0$$

e quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{|h|}{h} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) - lh}{|h|} + l \right] = l$$

come si voleva. Allo stesso modo si prova che $f_y(x_0,y_0) = m$.

Osservazione 3 In virtù del Teorema 4, se f è differenziabile in (x_0,y_0) allora

$$df(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$$

quindi, per la (1.6), la differenziabilità di f nel punto (x_0,y_0) si può caratterizzare nel seguente modo:

$$\text{f differenziabile in } (x_0,y_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Esempio 18 Sia data la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ dalla legge

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f non è differenziabile nel punto $(0,0)$ perché non è continua in tale punto.

b) Sia data la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

f non è differenziabile nel punto $(0,0)$ perché non è dotata di derivate parziali prime in tale punto.

c) Sia data la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

La funzione f è continua nel punto $(0,0)$ ed è dotata in tale punto di derivate parziali prime con $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, e, dunque, $df(0,0) = 0$. Studiamo la differenziabilità di f nel punto $(0,0)$. Risulta

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - df(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad \forall (h,k) \neq (0,0)$$

Si verifica facilmente che $\nexists \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}}$, quindi f non è differenziabile nel punto $(0,0)$.

d) Sia data la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x,y) = |xy|, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

La funzione f è continua nel punto $(0,0)$ ed è dotata in tale punto di derivate parziali prime: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, dunque $df(0,0) = 0$. Studiamo la differenziabilità di f nel punto $(0,0)$. Risulta

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - df(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad \forall (h,k) \neq (0,0)$$

Osserviamo che per ogni $(h,k) \neq (0,0)$ si ha

$$0 \leq \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}|k| \leq |k|$$

da cui, per confronto, si deduce che

$$\exists \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Quindi f è differenziabile nel punto $(0,0)$.

Il seguente risultato, noto come Teorema del differenziale totale, fornisce una condizione sufficiente affinché una funzione sia differenziabile in un punto.

Teorema 5 *Siano A un sottoinsieme non vuoto e aperto di $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) un punto di A, f una funzione reale definita in A. Supponiamo che f sia derivabile parzialmente rispetto a una delle due variabili, ad esempio x, in (x_0, y_0), e sia derivabile parzialmente rispetto all'altra variabile, in questo caso y, in A, con f_y continua in (x_0, y_0).*

Allora, f è differenziabile nel punto (x_0, y_0).

Dimostrazione

Per semplicità proveremo il teorema nell'ipotesi in cui f sia dotata di derivate parziali prime in A, entrambe continue nel punto (x_0, y_0).

La tesi equivale a provare che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

cioè che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : (h,k) \in H, 0 < \sqrt{h^2+k^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{\Delta f - df(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| < \varepsilon$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poichè f_x e f_y sono continue in (x_0, y_0), esiste $\delta_1 > 0$ tale che per ogni $(x,y) \in A$ tale che $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1$, si ha

$$|f_x(x,y) - f_x(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.7}$$

$$|f_y(x,y) - f_y(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.8}$$

Sia $(h,k) \in H$ tale che $0 < \sqrt{h^2+k^2} < \delta_1$. Si ha

$$|\Delta f - df(x_0, y_0)| =$$

$$|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k| =$$
$$|[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)]+$$
$$[f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)] - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k|. \tag{1.9}$$

Consideriamo la funzione di una variabile definita nell'intervallo di estremi $y_0, y_0 + k$ dalla legge

$$y \to f(x_0 + h, y).$$

Per il Teorema di Lagrange esiste $\bar{y}$ compreso fra y_0 e $y_0 + k$ tale che

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) = f_y(x_0 + h, \bar{y})k. \tag{1.10}$$

Analogamente, applicando il Teorema di Lagrange alla funzione definita nell'intervallo di estremi x_0 e $x_0 + h$ dalla legge

$$x \to f(x, y_0)$$

si ottiene l'esistenza di $\bar{x}$ compreso fra x_0 e $x_0 + h$ tale che

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = hf_x(\bar{x}, y_0) \tag{1.11}$$

Allora dalla (1.9), utilizzando le uguaglianze (1.10) e (1.11) segue

$$|\Delta f - df(x_0, y_0)| \leq$$
$$|f_y(x_0 + h, \bar{y}) - f_y(x_0, y_0)||k|+$$
$$|f_x(\bar{x}, y_0) - f_x(x_0, y_0)||h|. \tag{1.12}$$

Poichè

$$\sqrt{(x_0 + h - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2} \leq \sqrt{h^2 + k^2} < \delta_1$$

e

$$\sqrt{(\bar{x} - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} < \delta_1$$

possiamo usare le disuguaglianze (1.7) e (1.8) e maggiorare il secondo membro della disuguaglianza (1.12) ottenendo

$$0 \leq \frac{|\Delta f - df(x_0, y_0)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq$$

$$\leq |f_y(x_0 + h, \bar{y}) - f_y(x_0, y_0)| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |f_x(\bar{x}, y_0) - f_y(x_0, y_0)| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq$$

$$|f_y(x_0 + h, \bar{y}) - f_y(x_0, y_0)| + |f_x(\bar{x}, y_0) - f_y(x_0, y_0)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

La nozione di differenziabilità consente di provare il seguente teorema di derivazione delle funzioni composte.

Teorema 6 *Siano date una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e due funzioni $g_1, g_2 : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in un punto $t_0 \in (a, b)$ e tali che $(g_1(t), g_2(t)) \in A \ \forall t \in (a, b)$. Supponiamo che la funzione f sia differenziabile nel punto $(g_1(t_0), g_2(t_0))$. Allora, la funzione $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ definita da $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ è derivabile in t_0 e vale la seguente formula*

$$F'(t_0) = f_x(g_1(t_0), g_2(t_0))g_1'(t_0) + f_y(g_1(t_0), g_2(t_0))g_2'(t_0). \tag{1.13}$$

Osservazione 4 Il secondo membro della formula (1.13) è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$ tra i vettori $\nabla f(g_1(t_0), g_2(t_0))$ e $(g_1'(t_0), g_2'(t_0))$.

1.5.3 Derivate direzionali

Siano A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^2$ e f una funzione reale definita in A.

Dato (x_0, y_0) punto interno ad A, sia $\delta > 0$ tale che $I_\delta(x_0, y_0) \subseteq A$.

Siano $\underline{v} = (v_1, v_2)$ un versore e g_1, g_2 le due funzioni

$$g_1, g_2 :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$$

definite da

$$g_1(t) = x_0 + tv_1, \quad g_2(t) = y_0 + tv_2, \quad \forall t \in]-\delta, \delta[$$

Se la funzione composta

$$F(t) = f(g_1(t), g_2(t)), \quad \forall t \in]-\delta, \delta[$$

è derivabile nel punto $t_0 = 0$ diremo che f è dotata di derivata lungo la direzione del versore $\underline{v}$ nel punto (x_0, y_0). In tale caso il numero

$$D_{\underline{v}} f(x_0, y_0) = F'(0)$$

si chiama derivata direzionale di f lungo $\underline{v}$ nel punto (x_0, y_0) e si indica anche con il simbolo $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0)$. Dalla definizione data, se f è dotata di derivata lungo la direzione del versore $\underline{v}$ nel punto (x_0, y_0) allora

$$D_{\underline{v}} f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Osservazione 5 Osserviamo che

i) f è dotata di derivata lungo la direzione del versore $\underline{e_1} = (1, 0)$ nel punto (x_0, y_0) se e solo se è derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) e di ha

$$D_{\underline{e_1}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0);$$

ii) f è dotata di derivata lungo la direzione del versore $\underline{e_2} = (0, 1)$ nel punto (x_0, y_0) se e solo se è derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) e di ha

$$D_{\underline{e_2}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

iii) Non vale il viceversa di quanto affermato in i) e in ii): consideriamo, ad esempio, la funzione definita dalla legge

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dato un versore $\underline{v}$, si ha

$$D_{\underline{v}}f(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)-f(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{v_1v_2}{t}$$

e il limite precedente esiste finito (ed è uguale a zero) solo se $v_1v_2 = 0$, ne segue che le uniche derivate direzionali di f nel punto $(0,0)$ sono le due derivate parziali.

Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente affinchè una funzione sia dotata di derivate direzionali in un punto.

Teorema 7 *Se f è differenziabile nel punto (x_0,y_0) allora è dotata di derivata direzionale lungo il versore $\underline{v}$ e si ha*

$$D_{\underline{v}}f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\underline{v}.$$

Dimostrazione.

Basta applicare il teorema di derivazione della funzione composta e osservare che

$$g_1'(0) = v_1, \quad g_2'(0) = v_2.$$

ESEMPIO 19 La funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0.0) \end{cases}$$

è dotata di derivate direzionali, lungo una qualsiasi direzione,in $(0,0)$.

Infatti, se $\underline{v}=(v_1,v_2)$ è un versore allora

$$F(t) = f(tv_1,tv_2) = tv_1v_2^2, \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

e dunque

$$D_vf(0,0) = v_1v_2^2.$$

Osserviamo, tuttavia, che f non è differenziabile in $(0,0)$. Infatti,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = D_{e_1}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = D_{e_2}(0,0) = 0$$

ma il limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

non esiste.

Esercizio 5 Calcolare la derivata direzionale della funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = x\log(x^2+y^2+3) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

nel punto $(0,1)$ e lungo la direzione della retta di equazione $2x - y + 6 = 0$.

La funzione è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ e quindi anche nel punto $(0,1)$. Per calcolare la derivata direzionale possiamo applicare il teorema precedente.

Si ha

$$f_x(x,y) = \log(x^2+y^2+3) + \frac{2x^2}{x^2+y^2+3}, \quad f_y(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2+3}$$

e quindi

$$\nabla f(0,1) = (\log 4, 0).$$

Un vettore parallelo alla retta di equazione $2x - y + 6 = 0$ è $(1,2)$. Il versore parallelo è $\underline{v} = \big(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\big)$. Infine

$$D_{\underline{v}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \underline{v} = \big(\log 4, 0\big) \cdot \big(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\big) = \frac{\log 4}{\sqrt{5}}.$$

1.5.4 Applicazioni del calcolo differenziale

Analogamente al caso delle funzioni di una variabile il calcolo differenziale fornisce strumenti per studiare alcune proprietà locali delle funzioni.
Siano $A \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ ed $f : A \to \mathbb{R}$.

Definizione 18 *Diremo che* (x_0, y_0) *è un punto di massimo (minimo) relativo o locale di* f *se*

$$\exists\delta > 0 \quad : \quad f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \quad (f(x,y) \geq f(x_0,y_0)) \quad \forall (x,y) \in A \cap I_\delta(x_0,y_0).$$

Vale il seguente Teorema di Fermat

Teorema 8 *Se* $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{A}$ *è un punto di estremo relativo di* f *e se* f *è dotata di derivata lungo la direzione del versore* v *nel punto* (x_0, y_0) *allora*

$$D_{\underline{v}} f(x_0, y_0) = 0.$$

Dimostrazione

Basta osservare che, nelle ipotesi fatte, la funzione $F(t) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$ ha un estremo relativo in $t = 0$ e per il Teorema di Fermat sulle funzioni di una variabile segue che $F'(0) = 0$.

Osservazione 6 Se f è dotata di derivate parziali prime nel punto (x_0, y_0) e se $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{A}$ è un punto di estremo relativo di f, allora

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0$$

I punti (x_0, y_0) interni ad A e tali che $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ si dicono *stazionari.*

Analogamente a quanto accade nel caso unidimensionale, anche per le funzioni di due variabili si può provare che

$$(x_0, y_0) \quad \text{punto} \quad \text{stazionario di} \quad f \not\Rightarrow (x_0, y_0) \quad \text{punto} \quad \text{di estremo di} \quad f$$

.

Infatti, consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = xy, \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Risulta:

$$f_x(x,y) = y, \quad f_y(x,y) = x, \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e quindi $(0,0)$ è un punto stazionario di f. Tuttavia, $f(0,0) = 0$ e in ogni intorno di $(0,0)$ ci sono punti in cui $xy \geq 0$ e punti in cui $xy \leq 0$. Pertanto $(0,0)$ non è un punto di estremo relativo.

I punti stazionari di f che non sono di estremo relativo si chiamano **punti di sella**.

Se f è dotata di derivate seconde in A il determinante

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

si chiama Hessiano di f nel punto (x,y).

Per studiare la natura dei punti stazionari si può ricorrere alle seguenti condizioni necessarie del secondo ordine.

Teorema 9 *Se f è una funzione dotata di derivate seconde continue in A e se $(x_0,y_0) \in A$ è un punto di massimo (minimo) relativo di f allora*

i) $f_{xx}(x_0,y_0) \leq 0, \quad (f_{xx}(x_0,y_0) \geq 0)$

ii) $H(x_0,y_0) \geq 0.$

Esempio 20 La funzione dell'esempio precedente ha un punto stazionario in $(0,0)$. Poichè per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

si ha $H(0,0) < 0$ e quindi $(0,0)$ non è un punto di estremo relativo perchè se lo fosse dovrebbe valere la condizione *ii*).

Infine, si può dimostrare il seguente teorema che fornisce condizioni sufficienti del secondo ordine affinchè un punto sia di estremo relativo.

Teorema 10 *Siano f una funzione dotata di derivate seconde continue in A e $(x_0,y_0) \in A$ un punto tale che*

i) $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$

ii) $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, $(f_{xx}(x_0,y_0) > 0)$

iii) $H(x_0,y_0) > 0.$

Allora (x_0, y_0) *è un punto di massimo (minimo) relativo di* f*.*

Infine, illustriamo un metodo per la ricerca degli estremi relativi e assoluti.

RICERCA DEI PUNTI DI ESTREMO RELATIVO

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione dotata di derivate parziali seconde continue in A. Per determinare i punti di estremo relativo di f possiamo utilizzare le condizioni del primo e secondo ordine enunciate precedentemente.

Nella pratica si procede nel seguente modo:

1. si determinano i **punti stazionari** (x_0, y_0) di f risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

2. si calcolano le derivate seconde di f e si costruisce l'Hessiano $H(x_0, y_0)$.

3. se $H(x_0, y_0) \neq 0$, si possono presentare tre casi:

   a) $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ punto di **minimo** relativo di f

   b) $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ punto di **massimo** relativo di f

   c) $H(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ punto di **sella** di f

4. se $H(x_0, y_0) = 0$ non si possono applicare le condizioni del secondo ordine e bisogna procedere usando la definizione.

ESERCIZIO 16 Determinare, se esistono, gli estremi relativi in $\mathbb{R}^2$ della funzione defnita dalla legge

$$f(x,y) = 2x^2 + xy - y, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

La funzione è dotata di derivate seconde continue in $\mathbb{R}^2$.

Risulta

$$f_x(x,y) = 4x + y, \qquad f_y(x,y) = x - 1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Cerchiamo i punti stazionari di f:
$\begin{cases} 4x + y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -4 \\ x = 1 \end{cases}$
La funzione ha un solo punto stazionario $(1,-4)$. Calcoliamo le derivate seconde

$$f_{xx}(x,y) = 4, \quad f_{xy}(x,y) = 1, \quad f_{yy}(x,y) = 0,$$

Poichè

$$H(1,-4) = -1 < 0$$

il punto $(1,-4)$ è un punto di sella di f.

2. Determinare, se esistono, gli estremi relativi in $\mathbb{R}^2$ della funzione defnita dalla legge

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

La funzione è dotata di derivate seconde continue in $\mathbb{R}^2$.
Risulta

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 2y, \qquad f_y(x,y) = 2y - 2x \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Cerchiamo i punti stazionari di f:
$\begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x \\ x = 0 \vee x = \frac{2}{3} \end{cases}$
La funzione ha due punti stazionari $(0,0)$ e $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. Calcoliamo le derivate seconde

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{xy}(x,y) = -2, \quad f_{yy}(x,y) = 2,$$

Poichè

$$H(0,0) = -4 < 0$$

il punto $(0,0)$ è un punto di sella di f.
Poichè $H(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = 4 > 0$ e $f_{xx}(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = 4 > 0$
il punto $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ è un punto di minimo relativo per f.

<u>Ricerca dei punti di estremo assoluto</u>

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme chiuso e limitato e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Per il Teorema di Weierstrass f è dotata di massimo e minimo assoluto in A. I punti di massimo e minimo assoluto si cercano tra gli elementi dei seguenti insiemi:

A_1 = insieme dei punti interni ad A stazionari

A_2 = insieme dei punti interni ad A in cui manca una delle derivate parziali prime e l'altra è nulla oppure mancano entrambe

A_3 = insieme dei punti della frontiera di A.

La ricerca dei punti della frontiera di A candidati ad essere di estremo assoluto di f in A è particolarmente semplice nel caso in cui la frontiera di A si può "parametrizzare" . Infatti, sia

$$\partial X = \{(g_1(t), g_2(t)), \quad t \in [a, b]\}$$

con $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue. In tale caso, definita la funzione composta

$$F(t) = f(g_1(t), g_2(t)) \qquad \forall t \in [a, b]$$

è facile verificare che se $(x_0, y_0) = (g_1(t_0), g_2(t_0))$, con $t_0 \in [a, b]$ è un punto della frontiera di A di massimo (minimo) assoluto di f, allora t_0 è un punto di massimo (minimo assoluto) della funzione $F(t)$.

Nella pratica, dunque, si cercano i punti stazionari interni all'intervallo $[a, b]$ della funzione $F(t)$, i punti interni all'intervallo $[a, b]$ in cui F non è derivabile e si confrontano i valori di F in tali punti con $F(a)$, $F(b)$ e con i valori assunti da f nei punti degli insiemi A_1 e A_2 descritti prima. Si potranno in tal modo individuare i valori massimo e minimo di f in A.

Esercizio 7 Determinare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - y$$

nel quadrato A di vertici $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (1, 1)$, $P_3 = (1, 0)$, $P_4 = (0, 0)$.

La funzione è continua quindi è dotata di estremi assoluti nell'insieme chiuso e limitato A. Determiniamo gli insiemi A_1, A_2, A_3.

I punti stazionari si determinano risolvendo il sistema ottenuto eguagliando a zero le derivate parziali prime:

$$\begin{cases} 4x - y = 0 \\ -x - 1 = 0 \end{cases}$$

Si ottiene il punto $(-1, -4)$ che non appartiene ad A. Dunque, $A_1 = \emptyset$.

La funzione è derivabile nell'intero $\mathbb{R}^2$. Dunque, $A_2 = \emptyset$.

Per studiare l'insieme A_3, esaminiamo f in ciascuno dei lati dal quadrato A.

Prendiamo in esame la restrizione di f al segmento P_1P_2: dobbiamo considerare la funzione $g(x) = f(x, 1) = 2x^2 - x - 1$, $x \in [0, 1]$. Si ha $g'(x) = 4x - 1$ e risolvendo l'equazione $g'(x) = 0$ si ottiene il punto $P = (\frac{1}{4}, 1)$ interno a P_1P_2; altri punti candidati ad essere di estremo assoluto sono P_1 e P_2.

Prendiamo in esame la restrizione di f al segmento P_2P_3: dobbiamo considerare la funzione $h(y) = f(1, y) = 2 - 2y$, $y \in [0, 1]$, che non ha punti stazionari in $]0, 1[$; altri punti candidati ad essere di estremo assoluto sono P_2 e P_3.

Prendiamo in esame la restrizione di f al segmento P_3P_4: dobbiamo considerare la funzione $k(x) = f(x, 0) = 2x^2$, $x \in [0, 1]$, che non ha punti stazionari in $]0, 1[$; altri punti candidati ad essere di estremo assoluto sono P_3 e P_4.

Prendiamo in esame la restrizione di f al segmento P_1P_4: dobbiamo considerare la funzione $l(y) = f(0, y) = -y$, $y \in [0, 1]$, che non ha punti stazionari in $]0, 1[$; altri punti candidati ad essere di estremo assoluto sono P_1 e P_4.

Dall'esame delle restrizioni segue che i punti candidati ad essere di estremo assoluto sono vertici del quadrato e il punto P. Calcoliamo il valore della funzione in ciascuno di tali punti. Si ha

$f(0, 0) = 0$; $f(1, 0) = 2$; $f(0, 1) = -1$; $f(1, 1) = 0$; $f(\frac{1}{4}, 1) = -\frac{9}{8}$

quindi $\min_A f = -\frac{9}{8} = f(\frac{1}{4}, 1)$; $\max_A f = 2 = f(1, 0)$.