Capitolo 1

SERIE A TERMINI REALI E CENNI SULLE SERIE DI FUNZIONI

N.B. I presenti appunti sono destinati esclusivamente agli studenti del corso di Elementi di Analisi Matematica 2 (a.a. 2025-2026) del CdL in Informatica dell'Università di Catania, ed è vietato ogni altro utilizzo.

1.1 Prime definizioni

Sia data una successione di numeri reali $\{a_n\}$.

La somma di tutti i suoi termini viene indicata con uno dei simboli

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n + \cdots$$

oppure

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

ed è chiamata serie numerica di termine generale a_n. Per attribuire un significato, eventualmente numerico, alla serie, si introducono le seguenti somme (con un numero finito di addendi):

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_1 \\
&s_2 = a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
&s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ \ n \in \mathbb{N}, n > 1.
\end{aligned}$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$ il numero s_n si chiama *somma parziale di posto* n (o *somma parziale* n*- esima*) della serie (1.1) e si può scrivere anche nella forma

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Il comportamento al limite della successione $\{s_n\}$ delle somme parziali è chiamato *carattere* della serie.

Precisamente:

- se $s_n \to s$, si dice che la serie **converge** ed ha *somma* s, e si scrive
$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
- se $s_n \to +\infty(-\infty)$, si dice che la serie **diverge positivamente** (**negativamente**)
- se $\{s_n\}$ è non regolare, si dice che la serie è **indeterminata** o **oscillante** o **non regolare**

Studiare il carattere di una serie numerica vuol dire stabilire se è regolare o no e, in caso di regolarità, se è convergente o divergente positivamente o divergente negativamente.

Esempio 1. Sia $k \in \mathbf{R}$.

La serie di termine generale

$$a_n = k, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ha la somma parziale n-esima

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \\ kn & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi se $k = 0$ converge ed ha somma 0, se $k > 0$ diverge positivamente, se $k < 0$ diverge negativamente.

Esempio 2. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

ha somma parziale n-esima

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e dunque diverge positivamente.

Esempio 3. La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$
è indeterminata, in quanto la somma parziale n-esima è data da
$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$
e quindi $\{s_n\}$ non è dotata di limite.

Esempio 4. Sia $\{x_n\}$ una successione numerica. La serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n - x_{n+1})$$
è detta *serie telescopica.*

La sua somma parziale di posto n è

$$s_n = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_{n-1} - x_n) + (x_n - x_{n+1}) = x_1 - x_{n+1}$$

e quindi la serie

- converge ed ha somma $x_1 - l$ se $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$;
- diverge positivamente (negativamente)se $\lim x_n = +\infty(-\infty)$;
- è indeterminata se non esiste $\lim x_n$.

Ad esempio, se $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, la serie telescopica
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$
converge ad 1.

Esempio 5. Sia $x \in \mathbf{R}$. La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$
è detta *serie geometrica di ragione x.* Se $x = 1$ la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ e diverge positivamente.

Se $x \neq 1$, la somma parziale di posto n è

$$s_n = 1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Poichè

$$\lim x^n \begin{cases} = +\infty & \text{se } x > 1 \\ = 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

la serie geometrica

- diverge positivamente se $x > 1$;
- converge ed ha somma $\frac{1}{1-x}$ se e solo se $-1 < x < 1$;
- è indeterminata se $x \leq -1$.

Ad esempio, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$.

Esempio 6. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

si chiama *serie armonica* . La somma parziale n-esima è

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Diversamente dagli esempi precedenti, in questo caso non riusciamo a trovare un'espressione analitica della successione $\{s_n\}$ che consente di determinarne il limite. Osserviamo, tuttavia, che poichè

$$e = \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right\}$$

per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k < e$$

e dunque

$$\log \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k < 1$$

che implica
$$\log\frac{k+1}{k} < \frac{1}{k}. \tag{1.2}$$

Utilizzando la disuguaglianza (1.2) si ottiene

$$\begin{aligned} s_n &> \log 2 + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \cdots + \log\frac{n+1}{n} \\ &= \log\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot \quad \cdots \quad \cdot\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \log(n+1) \end{aligned}$$

cioè

$$s_n > \log(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dato che
$$\lim \log(n+1) = +\infty$$
per il Teorema del confronto sulle successioni, si ottiene che

$$\lim s_n = +\infty$$

e quindi la serie armonica diverge positivamente.

1.2 Risultati generali

.

Per le serie numeriche convergenti vale la seguente

Teorema 1.2.1 (Condizione necessaria per la convergenza)**.** Se la serie (1.1) converge allora
$$a_n \to 0$$
.

Dimostrazione. Basta osservare che $a_n = s_n - s_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Osservazione 1.2.1. La condizione espressa dalla Proposizione 1.2.1 è una condizione **solo necessaria** per la convergenza, ma non sufficiente, cioè

$$a_n \to 0 \quad \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{converge.}$$

Ad esempio,

$$\frac{1}{n} \to 0$$

ma la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge positivamente.

Definizione 1.2.1 (Serie resto)**.** Sia $p \in \mathbb{N}$.

La serie

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$$

ottenuta dalla serie (1.1) sopprimendo i suoi primi p termini, è detta *resto* di posto p della (1.1) .

Si ha subito la seguente

Proposizione 1.2.1. Una serie e tutti i suoi resti hanno il medesimo carattere.

In particolare, in caso di convergenza si ha:

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - (a_1 + \cdots + a_p)$$

Dimostrazione. Basta osservare che, indicata con S_n la somma parziale $n-$esima della serie resto, si ha

$$\begin{aligned} S_n &= a_{p+1} + \cdots + a_{p+n} \\ &= s_{n+p} - s_p \end{aligned}$$

e che la successione $\{s_{n+p}\}$ ha lo stesso comportamento al limite di $\{s_n\}$ essendo definitivamente uguale ad essa. $\square$

Esempio 7. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

è il primo resto della serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ quindi è convergente e la sua somma è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

Utilizzando la Proposizione (1.2.1) possiamo provare la seguente

Proposizione 1.2.2. Se due serie differiscono per un numero finito di termini, esse hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. Accanto alla serie (1.1), consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1.3}$$

e supponiamo che $b_n \neq a_n$ solo per un numero finito di indici, siano essi $n_1, \cdots, n_k$. Se $p = \max\{n_1, \cdots, n_k\}$, i resti di posto p delle due serie coincidono, la tesi segue allora dalla Proposizione 1.2.1.

□

Esercizio 1.2.1. Studiare al variare del parametro reale x il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2+x}{1-x}\right)^n.$$

In caso di convergenza calcolarne la somma.

Esercizio 1.2.2. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false

- □ Se $a_n \to S$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S;
- □ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e solo se $a_n \to 0$;
- □ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=20}^{\infty} a_n$ hanno lo stesso carattere ;
- □ se $a_n \to +\infty$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge.

Proposizione 1.2.3. Sia $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Allora, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$$

è regolare se e solo se la serie (1.1) è regolare.

In particolare

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} k a_n \quad \text{converge}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge positivamente}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n \begin{cases} \text{diverge positivamente} & \text{se } k > 0 \\ \text{diverge negativamente} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge negativamente}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n \begin{cases} \text{diverge negativamente} & \text{se } k > 0 \\ \text{diverge positivamente} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Basta osservare che le somme parziali della serie (3) sono $S_n = k s_n$. □

Alla luce della Proposizione 1.2.4, la serie dell'esempio 7 può essere rivista come ottenuta moltiplicando per $\frac{1}{2}$ i termini della serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, ottenendo ancora una volta che la somma è $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Definizione 1.2.2. Date le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

si chiama *serie somma.*

Vale la seguente

Proposizione 1.2.4. Se $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, si ha $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = s+S$. Se una delle due serie converge e l'altra diverge, o entrambe divergono con lo stesso segno, la serie somma diverge.

Dimostrazione. Basta osservare che le somme parziali della serie somma si ottengono sommando le somme parziali delle due serie. □

Ci sono due categorie di serie per le quali, a partire da considerazioni sul termine generale, si possono avere informazioni sul carattere della serie. Una è quella delle serie i cui termini hanno tutti lo stesso segno, l'altra è quella delle serie i cui termini sono alternativamente positivi e negativi.

Serie a termini di segno costante. Grazie alla Proposizione 1.2.4, senza ledere la generalità possiamo supporre che $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$. Osserviamo subito che, in questo caso, si ha $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. La successione delle somme parziali è dunque crescente, quindi regolare. Ogni serie a termini non negativi è dunque regolare. Precisamente, la serie converge se e solo se la successione delle somme parziali è limitata superiormente, e in tal caso la somma della serie è l'estremo superiore delle somme parziali. Esponiamo alcuni criteri utili per stabilire se converge o diverge.

CRITERIO 1 (DEL CONFRONTO). Siano

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (2)$$

due serie a termini non negativi, tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ o definitivamente. Allora si ha:

i) se la serie (2) converge, anche la serie (1) converge

ii) se la serie (1) diverge, anche la serie (2) diverge

DIMOSTRAZIONE. Il risultato segue subito osservando che, indicate rispettivamente con s_n e S_n le somme parziali delle due serie, si ha $s_n \leq S_n$. In particolare, in caso di convergenza, indicate rispettivamente con s e S le somme delle due serie, si ha, per ogni n: $s_n \leq S_n \leq S \Rightarrow s \leq S$.

CRITERIO 2 (DEL CONFRONTO ASINTOTICO). Siano

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (2)$$

due serie a termini non negativi.

i) se $\lim \frac{a_n}{b_n} = l > 0$ (ovvero, $a_n \sim b_n$), le due serie hanno lo stesso carattere

ii) se $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ (ovvero, $a_n = o(b_n)$), dalla convergenza della (2) segue la convergenza della (1); dalla divergenza della (1) segue la divergenza della (2).

DIMOSTRAZIONE. i) Basta osservare che, definitivamente, si ha

$$\frac{l}{2}\, b_n \leq a_n \leq 2l\, b_n$$

e applicare il criterio precedente.

ii) Basta osservare che, definitivamente, si ha $a_n \leq b_n$ e anche stavolta applicare il criterio precedente.

ESEMPI. 1) Sia $a_n > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ e supponiamo che $2^n a_n \to 3$, cosa si può dire sulla serie di termine generale a_n? Dall'ipotesi segue che $a_n \sim \frac{1}{2^n}$ e, dato che la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, anche la serie di termine generale a_n converge.

2) Sia $a_n > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ e supponiamo che $\frac{a_n}{n} \to 0$, cosa si può dire sulla serie di termine generale $\frac{1}{a_n}$? Dall'ipotesi segue che $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{a_n}} \to 0$, quindi $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{a_n})$, ne segue che la serie considerata diverge.

CRITERIO 3 (DEL RAPPORTO). Data la serie (1) a termini positivi, posto $y_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, si supponga che la successione $\{y_n\}$ sia regolare e abbia limite l finito o uguale a $+\infty$ ma diverso da 1. Allora si ha:

i) se $l > 1$, la serie diverge
ii) se $l < 1$, la serie converge

DIMOSTRAZIONE. i) Si ha, definitivamente, $y_n > 1$ ovvero $a_{n+1} > a_n$, quindi il termine generale della serie non può tendere a zero, per la Proposizione 5 la serie diverge.

ii) Sia $h \in]l, 1[$, definitivamente, ad esempio per $n > \alpha$, si ha $y_n < h$ quindi $a_{n+1} < ha_n$. Si ha dunque, se $n > \alpha$:

$a_{\alpha+1} < ha_\alpha$
$a_{\alpha+2} < ha_{\alpha+1} < h^2 a_\alpha$
$\dots$
$a_{n+\alpha} < h^n a_\alpha$

quindi la serie converge per confronto con la serie geometrica di ragione h.

ESEMPI. 1) Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{3^{n+1} n!}$, si ha

$y_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}(n+1)!} \frac{3^{n+1} n!}{2^n} = \frac{2}{3(n+1)} \to 0$

quindi la serie converge.

2) Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^n}{2^{n+2} n!}$, si ha

$y_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+3}(n+1)!} \frac{2^{n+2} n!}{n^n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{2} > 1$

quindi la serie diverge.

OSSERVAZIONE. Se $l = 1$ il criterio non fornisce alcuna informazione: ad esempio la serie armonica diverge mentre, come vedremo dopo, la serie di termine generale $\frac{1}{n^2}$ diverge, in entrambi i casi si ha $l = 1$.

In modo simile si prova il seguente

CRITERIO 4 (DELLA RADICE). Data la serie (1) a termini positivi, posto $y_n = \sqrt{a_n}$, si supponga che la successione $\{y_n\}$ sia regolare e abbia limite l finito o uguale a $+\infty$ ma diverso da 1. Allora si ha:

i) se $l > 1$, la serie diverge
ii) se $l < 1$, la serie converge

ESEMPIO. Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{n+1}{3n+4}\right)^n$, si ha

$y_n = \frac{n+1}{3n+4} \to \frac{1}{3}$, quindi la serie converge.

CRITERIO 5 (DI RAABE). Data la serie (1) a termini positivi, posto $y_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$, si supponga che la successione $\{y_n\}$ sia regolare e abbia limite l finito o uguale a $\pm\infty$ ma diverso da 1. Allora si ha:

i) se $l > 1$, la serie converge
ii) se $l < 1$, la serie diverge

Omettiamo la dimostrazione del criterio di Raabe, lo utilizziamo per studiare la serie di termine generale $\frac{1}{n^x}$, detta *serie armonica generalizzata di esponente* x, essendo x un numero reale. Si ha

$$y_n = n\left(\frac{\frac{1}{n^x}}{\frac{1}{(n+1)^x}} - 1\right) = n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^x - 1\right) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x - 1}{\frac{1}{n}} \to x$$

quindi la serie armonica generalizzata converge se e solo se $x > 1$ (il caso $x = 1$ era già noto).

CRITERIO 6 (DEL CONFRONTO CON LA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA). Data la serie (1) a termini positivi, esista $x \in \mathbf{R}$ tale che $\lim\ n^x\ a_n = l > 0$. Allora, si ha:

i) se $l > 1$, la serie (1) converge;

ii) se $l \leq 1$, la serie (1) diverge.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $\frac{a_n}{\frac{1}{n^x}} \to l$ ed applicare il Criterio 2.

OSSERVAZIONE. Il criterio appena esposto è anche detto Criterio dell'ordine di infinitesimo perché dal fatto che $n^x a_n \to l > 0$ segue che $a_n \sim \frac{1}{n^x}$, ossia che x è l'ordine di infinitesimo di a_n. In effetti è conveniente usare questo criterio nei casi in cui a_n è infinitesima.

Grazie alle serie a termini non negativi, siamo in grado di introdurre una classe di serie che possono essere studiate abbastanza facilmente.

Serie assolutamente convergenti.

Accanto alla serie (1), si consideri la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (4)$$

che è a termini non negativi. Diremo che la serie (1) è assolutamente convergente se la serie (4) è convergente. Si ha il seguente risultato

PROPOSIZIONE 5. Una serie assolutamente convergente è convergente.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $a_n = b_n - c_n$ con

$$b_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}$$

$$c_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

e $0 \leq b_n \leq |a_n|$, $0 \leq c_n \leq |a_n|$

quindi la tesi segue dal criterio del confronto.

Esempio. Si consideri la serie di termine generale $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ (serie esponenziale) essendo $x \in \mathbf{R}$. Per $x = 0$ essa converge ed ha somma zero. Per $x > 0$ possiamo studiarla con il criterio del rapporto, si ha $y_n = \frac{x^n}{n!} \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} \to 0$ quindi la serie converge. Se $x < 0$ la serie dei valori assoluti è quella di termine generale $\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$ e converge perché rientra nel caso precedente. La serie esponenziale, dunque, converge per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.2.3. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta e, in caso contrario, giustificare la risposta mediante un controesempio.

- ☐ Se $a_n \to +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge
- ☐ Se $a_n \to 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge
- ☐ Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge, $a_n \to +\infty$
- ☐ Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge, $a_n \to 0$
- ☐ se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ è divergente

Serie a segni alterni. Data una successione $\{a_n\}$ di numeri positivi, consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad (5)$$

in cui i termini di posto dispari sono positivi e quelli di posto pari sono negativi (o viceversa). Per una simile serie si hanno dei criteri che permettono di studiarne il carattere, essi prevedono che la successione $\{a_n\}$ sia monotona. Premettiamo il seguente risultato.

LEMMA. Se la successione $\{a_n\}$ è monotona, la serie non può divergere.

DIMOSTRAZIONE. Per fissare le idee, supponiamo che la successione sia decrescente. Dimostriamo che le somme parziali di posto pari danno luogo ad una successione monotona. Si ha infatti, dato che $\{a_n\}$ è decrescente, $a_{2n+1} > a_{2n+2}$, quindi

$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) > s_{2n}$ dunque la successione $\{s_{2n}\}$ è crescente, quindi non può divergere a $-\infty$. Allo stesso modo si prova che la successione $\{s_{2n-1}\}$ delle somme parziali di posto dispari è decrescente, quindi non può divergere a $+\infty$. Ne segue la tesi.

Siamo in grado ora di stabilire i seguenti criteri:

PROPOSIZIONE 6 (Criterio di Leibniz). Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ sia decrescente e tenda a zero.

Allora, la serie (5) è convergente e, indicata con s la sua somma, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$|s - s_n| \leq a_{n+1} \qquad (*)$$

DIMOSTRAZIONE. Dal lemma segue che la serie non diverge; per provare che converge basta dimostrare che $\{s_{2n}\}$ e $\{s_{2n-1}\}$ convergono allo stesso limite. Come osservato nella dimostrazione del Lemma, $\{s_{2n-1}\}$ è decrescente, osserviamo inoltre che è a termini non negativi in quanto è somma di addendi non negativi:

$s_{2n-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + a_{2n-1}$

quindi non tende a $-\infty$ ma ad un numero $s = \inf s_{2n-1}$. Si ha ora $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \to s$, la convergenza della serie è dunque acquisita. Osserviamo anche che, dato che $\{s_{2n}\}$ è crescente, si ha $s = \sup s_{2n}$. Proviamo ora la $(*)$. Sia $n \in \mathbf{N}$. Se n è pari, si ha $s \geq s_n$ quindi la $(*)$ equivale a $s - s_n \leq a_{n+1}$, ovvero $s \leq s_{n+1}$, vera in quanto $n+1$ è dispari. Se n è dispari, si ha $s \leq s_n$ quindi la $(*)$ equivale a $s_n - s \leq a_{n+1}$, ovvero $s \geq s_{n+1}$, vera in quanto $n+1$ è pari.

PROPOSIZIONE 7 (Criterio di non regolarità). Se la successione $\{a_n\}$ è crescente ed ha almeno un termine positivo, oppure è decrescente e non tende a zero, la serie (5) è indeterminata.

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 5 segue che la serie non può convergere e dal Lemma segue che non può divergere.

Esempi.

1) Si consideri la serie di termine generale $\frac{(-1)^n}{n}$ (serie armonica alternata). Dal criterio di Leibniz segue che essa converge. Grazie a questo esempio possiamo concludere che il viceversa della Proposizione 5 non vale, infatti la serie dei valori assoluti è la serie armonica che diverge.

2) Si consideri la serie di termine generale $\frac{x^n}{n}$ (serie logaritmica) essendo $x \in \mathbf{R}$. Per $x = 0$ essa converge ed ha somma zero. Per $x > 0$ possiamo studiarla con il criterio del rapporto, si ha $y_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{n}{x^n} \to x$ quindi la serie converge per $0 < x < 1$ e diverge per $x > 1$. Se $x = 1$ diverge (è la serie armonica). Se $x < 0$ la serie dei valori assoluti è quella di termine generale $\frac{|x|^n}{n}$ e rientra nel caso precedente, quindi la serie è assolutamente convergente per $-1 < x < 0$. Se $x = -1$ converge (è la serie armonica alternata). Se $x < -1$, trattandosi di una serie a segni alterni, studiamo la monotonia del valore assoluto del termine generale, proviamo che definitivamente si ha

$\frac{x^{n+1}}{n+1} > \frac{n}{x^n}$. Questa diseguaglianza equivale infatti a $|x| > \frac{n+1}{n}$, che definitivamente è vera perché $|x| > 1$ e il secondo membro tende ad 1. In definitiva, la serie logaritmica converge se e solo se $-1 \leq x < 1$.

3) Si consideri la serie di termine generale $\frac{(2x)^n}{n+2}$ essendo $x \in \mathbf{R}$. Per $x = 0$ essa converge ed ha somma zero. Per $x > 0$ possiamo studiarla con il criterio del rapporto, si ha $y_n = \frac{(2x)^{n+1}}{n+3} \frac{n+2}{(2x)^n} \to 2x$, quindi se $0 < x < \frac{1}{2}$ la serie converge, se $x > \frac{1}{2}$ diverge. Per $x = \frac{1}{2}$ diverge essendo il secondo resto della serie armonica. Se $x < 0$ il termine generale della serie è $\frac{(-1)^n \ |2x|^n}{n+2}$ quindi se $-\frac{1}{2} < x < 0$ la serie converge assolutamente, per $x = -\frac{1}{2}$ converge non assolutamente essendo il secondo resto della serie armonica alternata. Se $x < -\frac{1}{2}$ studiamo la monotonia del valore assoluto del termine generale, verifichiamo che si ha $\frac{|2x|^n}{n+2} < \frac{|2x|^{n+1}}{n+3}$. Essa equivale a $\frac{n+3}{n+2} < |2x|$ che definitivamente è vera perché $|2x| > 1$ e il secondo membro tende ad 1.

Proprietà commutativa. Data una corrispondenza biunivoca $j : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, si considerino le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (2)$$

supponendo che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, si abbia $b_n = a_{j(n)}$. In pratica, i termini della serie (2) sono gli stessi della serie (1), ma occupano posti diversi. Si dice allora che la serie (2) è un riordinamento della serie (1). In tal caso, si ha anche che la serie (1) è un riordinamento della serie (2) in quanto $a_n = b_{j^{-1}(n)}$. Si dice che la serie (1) gode della proprietà commutativa se tutti i suoi riordinamenti hanno il suo stesso carattere e, in caso di convergenza, la stessa somma. Si ha il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 8. Una serie a termini non negativi gode della proprietà commutativa.

DIMOSTRAZIONE. Siano, rispettivamente, s_n ed S_n le generiche somme parziali della serie (1) e del suo riordinamento (2), e supponiamo che la (1) converga ed abbia somma s. Si ha

$S_n = b_1 + \cdots + b_n = a_{j(1)} + \cdots + a_{j(n)} \leq s_p \leq s$,

essendo $p = \max\{j(1), \cdots, j(n)\}$, ne segue che le somme parziali della (2) sono limitate superiormente quindi la (2) converge ed ha una somma $S \leq s$. A questo punto, dato che anche la (1) è un riordinamento della (2), con lo stesso ragionamento si ottiene $s \leq S$. Ne segue che ciascuna delle due serie converge se e solo se converge l'altra, ed hanno la stessa somma.

Si ha anche il seguente risultato, più generale, che non dimostriamo.

PROPOSIZIONE 9. Una serie assolutamente convergente gode della proprietà commutativa.

Si può anche provare che, fra tutte le serie convergenti, quelle assolutamente convergenti sono le uniche a godere della proprietà commutativa.

ESERCIZI DI RIEPILOGO

Esercizio 1.2.4. Quali delle seguenti serie numeriche sono convergenti?

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\log(n+1)}; \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{2n}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2(n-1)!}; \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n\sqrt[5]{n}}\right]$$

□ *a)* (1) e (2) ;

□ *b)* (2) e (3) ;

□ *c)* (3) e (4) ;

□ *d)* (1) e (4) .

Esercizio 1.2.5. Quali delle seguenti serie numeriche sono convergenti?

$$(1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \tan\frac{1}{n}; \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{3^{n+2}} - n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)\right];$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}; \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}$$

□ *a)* (1) e (2) ;

□ *b)* (1) e (4) ;

□ *c)* solo la (1) ;

□ *d)* (1) e (3) .

Esercizio 1.2.6. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^{x^2}}+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}\right]$

☐ *a)* converge per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

☐ *b)* diverge positivamente per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

☐ *c)* converge per ogni $x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$;

☐ *d)* converge per ogni $x \in]-\infty, 1] \cup [1, +\infty[$.

Esercizio 1.2.7. Quali delle seguenti serie numeriche <u>non</u> sono convergenti?

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n^2}n!},\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+2}\right),$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{n^2+1}}{\ln(n^2+1)}$$

☐ *a)* (2) e (4) ;

☐ *b)* (2) e (3) ;

☐ *c)* (1) e (3) ;

☐ *d)* (1) e (4) .

Esercizio 1.2.8. Quali delle seguenti serie numeriche sono divergenti positivamente?

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)n^2;\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{n+1}{n\sqrt{n}+1};\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^{n+1}}$$

☐ *a)* (1) e (2);

☐ *b)* (2) e (3);

☐ *c)* (1) e (3);

☐ *d)* solo una delle tre.

Esercizio 1.2.9. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left(\log x\right)^n}{n^2\sqrt{n}+1}$

☐ *a)* converge se e solo se $x \in [1, \mathrm{e}]$;

☐ *b)* converge se e solo se $x \in \left]\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$;

☐ *c)* converge se e solo se $x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$;

☐ *d)* è oscillante se $x \in]\mathrm{e}, +\infty]$.

Esercizio 1.2.10. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^{|x-1|}} + \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^n\right]$

☐ *a)* converge per ogni $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$;

☐ *b)* diverge positivamente se e solo se $x = 0$, oppure $x = 2$;

☐ *c)* converge per ogni $x \in]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$;

☐ *d)* converge per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$.

Cenni sulle serie di funzioni

Consideriamo, per ogni $n \in \mathbf{N}$, una funzione $f_n : (a, b) \to \mathbf{R}$. In modo del tutto analogo a come abbiamo introdotto le serie numeriche, è possibile prendere in considerazione la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (*)$$

Per una serie di funzioni si possono introdurre varie nozioni di convergenza, punteremo la nostra attenzione solo su due di esse.

i) Sia $\bar{x} \in (a, b)$. Si dice che la serie di funzioni $(*)$ converge in $\bar{x}$ se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\bar{x})$ è convergente. Se ciò è verificato per ogni $x \in (a, b)$, si dice che la serie converge puntualmente in (a, b) e la funzione che ad ogni $x \in (a, b)$ associa la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è detta funzione somma della serie, in tal caso si scrive $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

ii) Si dice che la serie di funzioni $(*)$ converge totalmente in (a, b) se esiste una serie numerica a termini non negativi, convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, tale che $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in (a, b)$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$. Dalla definizione segue subito che una serie totalmente convergente è puntualmente convergente. Sia infatti $\bar{x} \in (a, b)$; la serie di termine generale $|f(\bar{x})|$ è maggiorata dalla serie di termine generale M_n quindi converge per il criterio del confronto; dunque la serie di termine generale $f(\bar{x})$ è assolutamente convergente. Si ha il seguente risultato, che non dimostriamo e del quale potremo apprezzare l'importanza alla fine di questo paragrafo.

TEOREMA A (di derivazione per serie). Sia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni derivabili in un intervallo limitato (a, b), siano verificate le seguenti ipotesi:
i) esiste $\bar{x} \in (a, b)$ tale che la serie converga nel punto $\bar{x}$
ii) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge totalmente in (a, b).
Allora, si ha:
j) la serie data converge totalmente in (a, b)
jj) indicate, rispettivamente, con f e F le funzioni somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$, f è derivabile e si ha $f'(x) = F(x)$ $\forall x \in (a, b)$.

Una categoria particolarmente interessante di serie di funzioni è costituita dalle cosiddette serie di potenze, nelle quali si ha

$$f_n(x) = a_n(x-c)^n, \quad n \in \mathbf{N}^0$$

ovvero

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots \qquad (**)$$

essendo $a_n (n \in \mathbf{N}^0)$ e c numeri reali assegnati. In particolare, i numeri a_n sono detti coefficienti della serie e c centro della serie.

Si può provare che, data una serie di potenze, si verifica una (e una sola) delle seguenti situazioni:
i) esiste $r > 0$ tale che la serie converge puntualmente in $]c - r, c + r[$, non converge in nessun punto esterno all'intervallo $[c - r, c + r]$ e converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subseteq]c - r, c + r[$
ii) la serie converge solo nel punto c
iii) la serie converge puntualmente in $]-\infty, +\infty[$ e converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subseteq]-\infty, +\infty[$

Nel caso i), il numero r si chiama raggio di convergenza della serie e l'intervallo $]c - r, c + r[$ si chiama intervallo di convergenza. Agli estremi di tale intervallo, alcune serie convergono ed altre no. Ad esempio, consideriamo la serie logaritmica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, possiamo vederla come serie di potenze di centro $c = 0$ e, per quanto sappiamo su tale serie, possiamo concludere che essa ha raggio di convergenza 1, converge nel punto -1 e non converge nel punto 1. Nel caso ii), il raggio di convergenza è 0 e non si definisce intervallo di convergenza, mentre nel caso iii) il raggio di convergenza è $+\infty$ e l'intervallo di convergenza è $]-\infty, +\infty[$.

OSSERVAZIONE 1. Data la serie di potenze $(**)$, introduciamo la serie i cui termini sono le derivate dei termini della serie data. La serie delle derivate è, evidentemente, ancora una serie di potenze, e si può dimostrare che il suo raggio di convergenza è uguale a quello della $(**)$.

Sia $(**)$ una serie di potenze con raggio di convergenza non nullo, sia f la sua funzione somma. Prima di tutto notiamo che

$$f(c) = a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{f(c)}{0!}$$

Ora, per ogni punto x appartenente all'intervallo di convergenza, è possibile individuare un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ contenente x e contenuto nell'intervallo di convergenza, in tale intervallo si può applicare il Teorema A grazie al quale, indicata con f la funzione somma della serie e tenendo conto dell'Osservazione 1, si ha

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$$

da cui $f'(c) = a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{f'(c)}{1!}$

Analogamente, applicando di nuovo il procedimento appena visto, si ha

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-c) + \cdots$$

da cui $f''(c) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(c)}{2!}$

e analogamente, per ogni $n \in \mathbf{N}^0$, si ha $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$

dunque la serie $(**)$ assume la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

ovvero, i coefficienti della serie possono essere espressi mediante le derivate successive della funzione somma.

Questo procedimento può essere in qualche modo invertito. Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ dotata di derivate di qualunque ordine, se $c \in (a, b)$ si costruisce la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

detta serie di Taylor relativa alla funzione f di centro c. Se in un punto $x_0 \in (a, b)$ tale serie converge ed ha somma $f(x_0)$, si dice che la funzione f è sviluppabile in serie di Taylor nel punto x_0.

OSSERVAZIONE 2. Consideriamo la serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

della quale sappiamo che converge per ogni $x \in \mathbf{R}$, quindi è una serie di potenze (di centro $c = 0$) con raggio di convergenza $+\infty$. Detta f la sua funzione somma, si ha per ogni $x \in \mathbf{R}$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$$

Per il Teorema A, si ha

$$f'(x) = 0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$$

ne segue che la funzione f è la soluzione del problema di Cauchy

$y' = y$

$y(0) = 1$

quindi $f(x) = e^x$. In particolare, per $x = 1$, si ha

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

abbiamo quindi espresso il numero irrazionale e come somma di una serie di numeri razionali.