Algebra Lineare e Geometria

Esercizi su matrici e sistemi lineari

1. Operazioni matriciali

Esercizio 1. Considera le seguenti matrici.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Quali coppie di matrici possono essere sommate?
(b) Quali coppie di matrici possono essere moltiplicate?
(c) Calcola: $A + C, A \cdot B, (E \cdot A) \cdot B, (B \cdot C) \cdot E, (A \cdot E) + D, E \cdot E^T, A \cdot C^T$.
(d) È possibile calcolare $(E \cdot A) \cdot B$ e anche $E \cdot (A \cdot B)$? Se sì, sono uguali?
(e) È possibile calcolare $A \cdot E$ e anche $E \cdot A$? Se sì, sono uguali?
(f) È possibile calcolare $C \cdot D$ e anche $D \cdot C$? Se sì, sono uguali?

2. Metodo di Gauss–Jordan

Esercizio 2. Usa il metodo di Gauss–Jordan per portare le seguenti matrici in forma di Echelon ridotta e determina il loro rango. Per le matrici che dipendono da un parametro, discuti il rango della matrice al variare del parametro.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3\lambda & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 3 \\ \lambda+1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

3. Rango di una matrice

Esercizio 3. Determina il rango delle seguenti matrici al variare dei parametri.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda & \lambda^2+1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 & -2\lambda^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \lambda^2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 6-\lambda & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ 2 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3\lambda & 8+2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 8+8\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & t \\ t+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-t \\ 1 & -t & 1 \\ -1-t & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & t & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ t & t & 1 & 3 \\ 0 & t & 0 & t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 2-t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2t+1 & 3 \\ t & t-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t+1 & -t \\ 2t & 1 & -1 \\ 0 & t+2 & -t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2+t & 1 & 1 \\ 1 & 2+t & 1 \\ 1 & 1 & 2+t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ -1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t+1 & t & 2 & 3 \\ t & t & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2t & 1 \\ 0 & t & 0 & t \end{pmatrix}$$

4. Determinante

Esercizio 4. Calcola il determinante delle seguenti matrici, usando di volta in volta il metodo che ritieni più opportuno.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Per ogni $n \geq 1$ e $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dimostra che il determinante della seguente matrice

$$V := V(x_1, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R}) ,$$

detta di Vandermonde, è uguale a

$$\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) .$$

5. Sistemi lineari

Esercizio 6. Risolvi i seguenti sistemi usando il metodo di Gauss–Jordan

$$(a) \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x \quad\;\; - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y - 2z = -1 \\ x + z = 2 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 \quad\;\; + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \qquad (e) \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \qquad (f) \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 2x - y + z = 14 \\ 3x + 8y - 10z = -4 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 8 \end{cases} \qquad (h) \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x + 5y + z = 9 \end{cases} \qquad (i) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - 5y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

Esercizio 7. Per ognuna delle sguenti matrici, utilizza il teorema di Rouché–Capelli per stabilire se il sistema corrispondente ammette o meno soluzioni e, in caso positivo, quante soluzioni ammette. Ogni matrice va considerata come la matrice *completa* del sistema lineare associato. Discuti le risposte al variare dei parametri $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ove presenti.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -8 \\ 3 & -3 & -2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 2 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (e)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \qquad (f)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & \mu & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Usando il teorema di Rouché–Capelli, discuti l'esistenza e il numero di soluzioni dei seguenti sistemi lineari dipendenti da un parametro reale. Quando il sistema ammette soluzione, descrivile.

$$(a)\ \begin{cases} x_1 + 2x_4 = k \\ 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 = k \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 8x_4 = k(k+1) \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + (k+1)x_2 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + (k+1)x_2 + (k^2+k)x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x_1 + kx_3 = 0, \\ x_2 + kx_4 = 0, \\ x_1 + x_3 = k+1 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} x + 2y + 3z - t = k, \\ x - 2y - z + 3t = 0, \\ x + t = 0, \\ y + z + (k-1)t = 0 \end{cases}$$

Esercizio 7. Risolvi i seguenti sistemi lineari omogenei. Quando il sistema dipende da un parametro, utilizza il teorema di Rouché–Capelli per discutere l'esistenza e il numero di soluzioni. Quando esistono, descrivile.

$$(a)\ \begin{cases} 3x+2y+7z=0 \\ 4x-3y-2z=0 \\ 5x+9y+23z=0 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x+y+3z=0 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x_1+x_2+x_4=0, \\ x_1+(k+1)x_2+3x_4=0, \\ x_1+(k+1)x_2+(k^2+k)x_3+4x_4=0, \\ x_1+x_2+3x_4=0 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} 2kx_2+x_3-x_4=0, \\ x_1-2x_3+kx_4=0, \\ x_1-2kx_3+x_4=0 \end{cases}$$