Corollario:

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ con A invertibile ovvero con rank $A = n$ e il $\det A \neq 0$

A star ??

In questo caso $A^{-1} = A^{*}/\det A$

Proposizione:

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

1) $rk(A \cdot B) \leq \min\{rk A, rk B\}$
2) Se $m=n$ e A è invertibile allora il $rk(A \cdot B) = rk(B)$
3) Se $n = p$ e B è invertibile allora $rk(A \cdot B) = rk A$

Lemma: $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, B è una sottomatrice di A

$rk(B) \leq rk(A)$

Teorema

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$rk(A)$ è uguale alla dimensione della più grande sottomatrice di A con determinante non nullo.

Esempio: $rk = ??$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sottomatrice 2×2 invertibile

rank matrice

$2 < rk A < 3$

rank sottomatrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Non esiste nessuna sottomatrice 3×3 invertibile

quindi $rk A = 2$

teorema degli orlati

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

B sottomatrice quadrata di A, $r \times r$ tale che $\det B \neq 0$

Se tutte le sottomatrici di A di ordine $(r+1)(r+1)$ ottenute orlando B hanno determinante zero allora $rk\, A = r = rk\, B$

aggiungendo una riga o una colonna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha almeno rango 1 e massimo 5

Scegliamo una matrice 2x2 con $\det \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det = -4 - 2 \cdot 2 = -8$

Scegliamo una matrice 3x3 con $\det \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aggiungendo le righe evidenziate otteniamo

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det = 0 + (4 \cdot 6) + 0 - 0(-8 \cdot 3)$

$= 24 - 24 = 0_{\mathbb{R}}$ non è invertibile

Dobbiamo cercare un'altra matrice

Righe possibili = 1,5

Colonne possibile = 1,5

ignoro le queste righe e colonne perché sono tutti zero

Controlliamo aggiungendo le righe 5 e le colonne 1

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

Non ci sono matrici 3x3 invertibili quindi $rk\,A = 2$

Sistemi lineari

$$\begin{cases} B+F+Z = 750 \text{ gr} \\ B = 100 \text{ gr} \\ F = 2(B+Z) \end{cases} \qquad \begin{cases} F+Z = 650 \\ B = 100 \\ F = 200+2Z \end{cases} \qquad \begin{cases} 200+2Z+Z = 650 \\ // \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3Z = 450 \\ // \\ // \end{cases} \qquad \begin{cases} Z = 150 \\ B = 100 \\ F = 500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B+F+Z+U+L+C = 1000 \\ F = C+B \\ B = L \\ Z+U = F+150 \\ F+C = 2(L+R) \\ Z = \frac{2}{3}U \end{cases}$$

Risolvere questo sistema è complicato

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{matrice dei coefficienti}} \qquad X = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{matrice delle variabili}} \qquad B = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{matrice dei termini noti}}$$

$$\boxed{A \cdot X = B}$$

$$\underbrace{\left(A \mid B \right)}_{\text{matrice completa}} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} B+F+Z+U+L+C = 1000 \\ F = C+B \\ B = L \\ Z+U = F+150 \\ F+C = Z+U \\ F+C = 2(L+R) \\ Z = \frac{2}{3}U \end{cases} \qquad \begin{cases} // \\ -B+F-C=0 \\ B-L=0 \\ Z+U-F=150 \\ F+C-Z-U=0 \\ F+C-2L-2R \\ Z-\frac{2}{3}U=0 \end{cases}$$

coefficienti di queste lettere in ordine

$$\begin{array}{ccccccc} B & F & Z & U & L & C & = \text{ris} \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1000 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dopo Gauss-Jordan

$$
\begin{array}{cccccccc}
B & F & Z & U & L & C & = & ris \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 250 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 150 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 150
\end{array}\right)
$$