$U, W \subseteq V$ tale che $U \cap W = \{0\}$ allora $U + W = U \oplus W$

$v \in U \oplus W$ $\exists! \, u \in U, w \in W$ tali che $u + w = v$

BASI DI SPAZI VETTORIALI

V spazio vettoriale, $S \subseteq V$ sottoinsieme

ovvero un'insieme di vettori tali che preso un qualunque vettore $\in S$ si può scrivere come combinazione lineare degli altri

S è un insieme di generatori di V se $\langle S \rangle = V$

Esempio:

$S = \{(0,1), (1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\langle S \rangle = \mathbb{R}^2 \Rightarrow (\mu, \lambda) = \mu(1,0) + \lambda(0,1)$

questo ha un unico modo per essere rappresentato

$R = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$

$\langle R \rangle = \mathbb{R}^2 \Rightarrow (3,4) = 3(1,0) + 4(0,1) = 3(1,1) + 4(0,1)$

$(\mu, \lambda) = \mu(1,0) + \lambda(0,1) = \lambda(1,0) + (\mu - \lambda)(1,0)$

questo più di uno

$S \subseteq V$ sottoinsieme, se $\forall v_1 \dots v_m \in S$

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_m = 0$

Se questa proprietà è vera S si dice linearmente indipendente se è falsa S si dice linearmente dipendente

$S = \{(0,1), (1,0)\}$

$$\lambda_1(0,1) + \lambda_2(1,0) = (0,0) \iff \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1(0,1) + \lambda_2(1,0) = (\lambda_2, \lambda_1)$$

è linearmente indipendente se l'unico modo che ho per per venire le $c.L. = 0$ è essere $\lambda = 0$

$R = \langle (0,1)\ (1,0)\ (1,1) \rangle$

$$1(0,1) + 1(1,0) - 1(1,1) = (0,0)$$

$$(0,1) + (1,0) + (-1,-1) = (0,0)$$

$V = \{(0,0)\}$ $\quad 1(0,0) = (0,0)$

Sono entrambi linearmente dipendenti perchè per un generico $\lambda \neq 0$ le $c.L = 0$

Proposizione: $m > 1$, $S = \{V_1 \dots V_m\}$ lin. dip.

$\Rightarrow \exists\, J \in \{1 \dots m\}$ tale che $V_J = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq J}}^{m} \mu_i V_i$

Dimostrazione

S lin dip $\Rightarrow \exists\ \lambda_1 \dots \lambda_m$ non tutti zero tale che

$\lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_m V_m = 0 \quad \Rightarrow \exists\, J \in \{1 \dots N\}$ tale che $\lambda_J \neq 0$

$$\Rightarrow V_J = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq J}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_J} V_i, \quad \mu_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_J} \Rightarrow V_J = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq J}}^{m} \mu_i V_i$$

Un insieme $B \subseteq V$ è una base se:

i) $\langle B \rangle = V$

ii) B è linearmente indipendente

Esempio:

$B = \{(0,1)(1,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$

$\lambda(0,1) + \mu(1,0) \Rightarrow (\lambda, \mu)$ e quindi

Remark

un base viene considerate ordinate

$B = \{V_1, V_2\} \neq \{V_2, V_1\}$

Corollario

B base di V $\quad B = \{ v_1 \dots v_n \}$

Allora $\forall v \in V \ \exists! \ \lambda_1 \dots \lambda_n$ tale che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

V spazio vettoriale, $B = \{ b_1 \dots b_n \}$

$\forall v \in V \quad v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ per unici $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$

$v \rightsquigarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ coordinate di v rispetto alla base B

Proposizione

V è uno spazio vettoriale, $S = \{ v_1 \dots v_n \}$ genera V. Allora esiste un sottoinsieme di S che forma una base di V

$S = \{ (1,0), (0,1), (1,1) \}$ generatore ma non base

$= \{ (1,0), (0,1) \}$ base di $\mathbb{R}^2$

$\rightarrow$ è anche un sottoinsieme di S

Lemma di Steinitz

V spazio vettoriale, $S = \{ v_1 \dots v_n \}$ generatore di V

Se $\{ w_1 \dots w_r \}$ è lin ind allora $r \leq n$

$\hookrightarrow$ insieme

Corollario

V spazio vettoriale con base $B = \{ b_1 \dots b_n \}$, $S = \{ w_1 \dots w_r \} \subseteq V$

sottoinsieme

i) S genera $V \Rightarrow r \geq n$

ii) S lin ind $\Rightarrow r \leq n$

Corollario

$B = \{ v_1 \dots v_n \}$ e $B' = \{ w_1 \dots w_r \}$ basi di V, allora $n = r$

Dimensione di uno spazio vettoriale V è il numero di elementi che compongono una sua base

$\mathbb{R}^n$ $E \doteq \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \dots \underset{e_n}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$ base di $\mathbb{R}^n$

$\dim \mathbb{R}^n = n$ base standard

Corollario: V spazio vettoriale, $\dim V = n$ $S = \{ v_1 \dots v_n \}$

per vedere se è un base:

i) S lin ind

ii) S genera V $\Rightarrow$ S è una base

Esempio:

- $V = \{0\}$ = non ha un base quindi $\dim V = 0$
- $V = \mathbb{R}$ $B = \{1\}$ $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = \lambda \cdot 1, \lambda \in \mathbb{R} = 0 = \lambda \cdot 1 \Rightarrow \lambda = 0$

$\dim \mathbb{R} = 1$

- $M_{2,2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Downarrow$

$\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{Bmatrix}$ $\quad$ $\mathrm{Dim}\ M_{2,2}\mathbb{R} = 4$

- $M_{m,n}(\mathbb{R})$ $\quad$ $\mathrm{Dim} = m \cdot n$

Corollario

V spazio vettoriale, $\dim V = n$

$W \subseteq V$ sottospazio

$\dim W \leq \dim V$

In più $\dim W = \dim V$ se e solo se $W = V$

Proposizione

V spazio vettoriale, dim $V = n \to V = \{v_1 \dots v_n\}$

$S = \{v_1 \dots v_r\}$ lin ind (quindi $r \leq n$) $S \subseteq V$

allora $\exists\, v_{r+1}, \dots, v_n$ tali che $\{v_1 \dots v_r, v_{r+1} \dots v_n\}$ è una base di V

teorema (formula di Grassmann) V spazio vettoriale

$U, W \subseteq V$ sottospazi.

$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$