Proposizione

V spazio vettoriale $\dim V = n$

$W \subseteq V$ sottospazio. $\exists W' \subseteq V$ sottospazio tale che $W \oplus W' = V$

Dimostrazione

Sia $\{w_1 \dots w_r\}$ basi di W

$(r \leq n) \Rightarrow \{w_1 \dots w_r\}$ lin ind in V

$\Rightarrow \{w_1 \dots w_r, w_{r+1} \dots w_n\}$ Base di V $\Rightarrow \{w_{r+1} \dots w_n\}$ lin ind e non stanno in W $\Rightarrow W' = \langle w_{r+1} \dots w_n \}$

$\Rightarrow W \cap W' = \{0\}$ e $W + W' = V$

$\Rightarrow W \oplus W' = V$

Sottospazi di $\mathbb{R}^n$

Fissiamo la base standard $E = \{e_1 \dots e_n\}$ di $\mathbb{R}^n$

Abbiamo 2 modi per rappresentare un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$

1) Come spazio generato da un insieme di vettori, $W = \langle S \rangle$

2) Come soluzione di un sistema omogeneo, $W \{$ soluzioni di $A \cdot x = 0 \}$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

1) Si chiama rappresentazione parametrica

2) Si chiama rappresentazione cartesiana

Dato un sottospazio dobbiamo dare le 2 rappresentazioni e la base

Base di un sottospazio in forma parametrica

$W = \langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^n \qquad S = \{V_1 \dots V_m\}$

$$A = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \text{Gauss-Jordan (echelon normale)}$$

$\overline{V_1}$ indica che V_1 è una riga

$$\rightsquigarrow A' = \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ \vdots \\ V'_m \end{pmatrix}$$

le righe non nulle formano una base di W

Esempio:

$S = \{(1,1,2),(0,0,1),(1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{G.J}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan

$\Rightarrow W = \langle (1,1,2),(0,0,1) \rangle$ base di S

$\dim W = rk\, A$

$W = \underbrace{row(A)}_{\langle A_1 \dots A_m \rangle}$

Con questa nomenclatura indichiamo il sottospazio generato dalle righe di A

la matrice formata prendendo i vettori di S e mettendoli uno sotto l'altro

Corollario

$S = \{V_1 \dots V_m\} \subseteq \mathbb{R}^n \qquad A = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

S lin indip $\Rightarrow rk\, A = m$

Dimostrazione: Esercizio S lin. dip $\Leftrightarrow$ $rkA < n$

Base di un sottospazio in forma cartesiana

$W \subseteq \mathbb{R}^n$ $\qquad W =$ soluzioni di $A \cdot X = 0$ $\qquad A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Detto anche

$\dim W = n - rk A \Rightarrow n - r$

Rouché - Capelli

$\underbrace{Ker}(A) \Rightarrow$ Kernel

Ci sono $n-r$ parametri, ovvero $n-r$ variabili libere.

forma di echelon ridotta

$$A \underset{G-J}{\rightsquigarrow} B \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = b_{11} x_{r+1} + \dots + b_{1,n-r} x_n \\ x_r = b_{r,1} x_{r+1} + \dots + b_{r,n-r} x_n \end{cases}$$

G-J $\Rightarrow$ Gauss-Jordan

$$= \begin{pmatrix} b_{11} x_{r+1} + \dots + b_{1,n-r} x_n \\ b_{r,1} x_{r+1} + \dots + b_{r,n-r} x_n \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{soluzione}$$

$$\text{Base} = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{r,1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{1,2} \\ b_{r,2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} b_{1,n-r} \\ b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{n-r}$$

Esempio

$$W = \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \overset{G.J}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk = 2$

$\dim W = 4 - 2 = 2$

↳ numero variabili

$$\overset{G.J.}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 3x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

soluzioni in forma matrice

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 + 8x_4 \\ x_2 = +3x_3 - 4x_4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{pmatrix} -3x_3 + 8x_4 \\ 3x_3 - 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= w_1} x_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= w_2} x_4$$

$\{w_1, w_2\}$ ↗ base di W → ovvero $Ker(A)$

teorema del rango

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

insieme delle soluzioni di un sistema

$$rk\,A + \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(A))}_{\text{nullità di matrice } A} = n$$

nullità di matrice A

null (A)

Come possiamo da una rappresentazione ad un'altra?

Forma cartesiana → forma parametrica

$W = \mathrm{Ker}(A) = \{$ soluzioni di $A \cdot x = 0\}$ troviamo una base $B = \{b_1 \dots b_r\}$ → $W = \langle b_1 \dots b_r \rangle$ forma parametrica

$W = \{(-3,3,1,0), (8,-4,0,1)\} \to \langle (-3,3,1,0), (8,-4,0,1) \rangle$

forma parametrica → forma cartesiana

Proposizione

A, B due matrici

$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{row}(B) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(B) = \mathrm{row}(A)$

in forma parametrica

$W = \langle S \rangle = \langle v_1 \dots v_m \rangle \in \mathbb{R}^n \to \mathrm{row}(A)$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

Consideriamo $\mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$

Sia $B = \{b_1, \dots b_r\}$ una base di Ker A

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} \in M_{m,m}(\mathbb{R})$$

$\ker A = \text{row}\, B \Rightarrow \ker B = \text{row}\, A = W \Rightarrow W = \ker B$

forma cartesiana

Sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^n$

Forma cartesiana	Forma parametrica
V = soluzione di $A \cdot x = 0$	$V = \langle V_1 \dots V_m \rangle$
$= \ker(A)$	$= \text{row}(A)$

Esempio

forma parametrica

$$V = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{} \subseteq \mathbb{R}^3$$

si potrebbe scrivere anche come $V = \text{row}(A)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}}_{}$$

forma cartesiana

$$\begin{pmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 \Rightarrow \ker(A) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{} \right\rangle$$

Base di V denominata B

$$\underbrace{B = (2\ 0\ 1) \Rightarrow \ker A = \text{row}\, B = V \Rightarrow V : \{ 2x_1 + x_3 = 0}_{}$$

Questo ci spiega chiaramente che posso fare da parametrica a cartesiana, infatti ci dice che

$\ker A = \text{row}\, B$ e viceversa

$\ker A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \text{row}\, B = (2\ 0\ 1)$

Perché è utile passare da una forma all'altra?

Intersezioni di sottospazi (forma cartesiana è la più comoda)

Dati $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ determinare $W_1 \cap W_2$

$W_1 = \operatorname{Ker} A_1 \quad , W_2 = \operatorname{Ker} A_2$

non è un diviso ci indica una matrice con A_1 sopra e A_2 sotto

$$A = \left(\frac{A_1}{A_2}\right) \longrightarrow W_1 \cap W_1 = \operatorname{Ker} A$$

$$W_1 = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ -x_1 + x_3 = 0 \right.$$

$$W_2 = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

per evitare che ci siano equazioni inutili riduci con G-J in forma di echelon ridotta

$$W_1 \cap W_2 = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Somma di sottospazi (la forma parametrica è la più comoda)

$W_1 = \operatorname{row}(A_1)$, $W_2 = \operatorname{row}(A_2) \subseteq \mathbb{R}^n$

$$A = \left(\frac{\operatorname{row}(A_1)}{\operatorname{row}(A_2)}\right) \longrightarrow W_1 + W_2 = \operatorname{row} A$$

$$W_1 = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ x_1 = x_3 \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 \qquad W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

trasformazione da cartesiana a parametrica

$$W_2 = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{row}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trasformazione
da cartesiana
parametrica

$$W_1 + W_2 = \text{row}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dim = 3$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$