Interiorizzare le moltiplicazioni e Gauss

Con le matrici si possono fare le seguenti cose:

- Somma tra matrici
- Prodotto tra una matrice e uno scalare
- Prodotto tra matrici (solo quando il numero di righe della prima è uguale al numero di colonne della seconda

$$0 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$A + 0 = A$

$0 + A = A$

$A + (-A) = 0$

nella somma lo 0 è una matrice nulla anche detta identità

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \in M_{m,m}(\mathbb{R})$$

$\downarrow$

id_M $\to$ questa è una matrice chiamata identità che rende vere queste cose $\to$

$id_M \cdot A = A$

$A \cdot id_M = A$

$\boxed{\text{È vero } \forall A \in M_{m,m}(\mathbb{R}) \ \exists B \in M_{m,m}(\mathbb{R}) \text{ tale che } A \cdot B = id_M = BA \ ?}$

- Se A ammette un tale elemento B, B si chiama l'inversa di A, e si scrive A^{-1}

Forma di echelon: una matrice $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ si dice in forma di echelon

- se tutte le righe nulle sono in fondo
- se in ogni riga il primo elemento non zero da sinistra (pivot) è alla destra di tutti i pivot delle righe superiori (ha tutti zero sotto)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ è in forma di echelon

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$ non è in forma di echelon

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ è in forma di echelon

Forma di echelon ridotta: se

- in forma di echelon
- tutti i pivot sono uguali ad 1
- ogni Pivot è l'unico elemento non-zero della sua colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ questa è in forma di echelon ridotta

Metodo di Gauss - Jordan

Serve per trasformare una matrice in una matrice di echelon e poi in una matrice di echelon ridotta

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{Bmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

per diventare una matrice di echelon dobbiamo rispettare le seguenti regole (lavoriamo solo sulle righe)

- Scambio tra righe
- Moltiplicare ogni riga per uno scalare non nullo
- Sommare a un riga una combinazione lineare tra le altre righe

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 = r_3 - r_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_2 \leftrightarrow r_3 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{forma di scala}} \qquad r_2 \to \frac{r_2}{3} \quad r_3 \to \frac{r_3}{3} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1 \to r_1 - 4r_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5-(4\cdot\frac{2}{3}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Queste regole sono applicabili a qualsiasi matrice

Sottomatrice

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

Una sottomatrice di A è la matrice che si ottiene prendendo le entrate alle intersezioni di m' righe ed n colonne

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & \underline{1} & 1 & \underline{-3} & \underline{-1} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & \underline{-1} & 2 & \underline{-4} & \underline{1} \end{pmatrix}}_{\text{colonne scelte casualmente}} \qquad A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{numeri delle intersezioni tra matrici}}$$

Metodo di Gauss - Jordan

1) trovare il primo elemento non nullo nelle prime colonne se non esiste passiamo alle seconde e così via

2) Scambiamo $\underset{\text{trovato nel passaggio precedente}}{\overset{\uparrow}{r_i}}$ con r_1. In questo modo abbiamo il pivot in posizione $(1,1)$

3) Sostituiamo r_i con r_i / e_{11} Quindi ora $e_{11} = 1$

4) Per ogni $i > 1$. Sostituiamo r_i con $r_i - e_{i1} r_1$

5) In questo modo la matrice diventa $\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ \vdots & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_m & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$

6) Ripeti i passaggi 1-5 per la sottomatrice

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ & & \vdots \\ b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

7) Ripeti fino a che non raggiunge l'ultima riga o l'ultima colonna

8) Otteniamo una matrice C in forma di Echelon con tutti i pivot uguali a 1

9) Sia $c_{l,k}$ l'ultimo pivot. Per ogni $i < l$ sostituiamo r_i con $r_i - e_{ik} r_l$

10) Ripeti 9 per tutti i pivot dal basso verso l'alto

11) Otteniamo una matrice D in forma di echelon ridotta

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad r_1 \to r_1 - r_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{matrix} r_2 \to r_2 - 3r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2/3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_3 \to r_3 + r_2 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{forma di echelon}} \quad \frac{r_1 \to r_1 + 2r_3}{r_2 \to r_2 - r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{l,k} = C_{3,4}$$

$$R_1 = R_1 - e_{1,4} R_3 \to R_1 = R_1 + 2R_3$$

$$R_2 = R_2 - e_{2,4} R_3 \to R_2 = R_2 - R_3$$

Rango di una matrice

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ il rango di A è il numero di pivot della sua forma di echelon. $rk\, A$ ($rank\, A$)

$$0 \le rk\, A \le \min(m,n)$$

Si dice che A ha rango massimo se $rk\, A = \min(m,n)$

Calcoliamo l'inversa della matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ (solo per le matrici quadrate)

$$\left(A \;\middle|\; id_n \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

Dopo Gauss-Jordan

$$\left(D \;\middle|\; D' \right)$$

Se $D = id_n$ allora $D' = A^{-1}$

$$\Downarrow$$

$$\left(D \;\middle|\; D' \right) \longrightarrow \left(id_n \;\middle|\; A^{-1} \right)$$

Se $D \neq id_n$ allora A non invertibile

Otteniamo l'identità se $rk\, A = n$

un solo pivot $\neq$ da n

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow M_{2,2}$$

non invertibile per $rk\, A = 1 \neq n = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^{-1} = A}$$

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio alla lavagna

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2/2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 = r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 = r_2 / \frac{5}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$r_1 = r_1 - \frac{1}{2} r_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

è uguale alla matrice identità aggiunta all'inizio ciò vuol dire che la matrice è invertibile

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$