1) Scrivere un programma che fa la moltiplicazione tra matrici (Standard - Strassen)

2) Implementare Gauss-Jordan

3) Determinante

Esercizio 2 $\quad V_1 = (1,0,1,0) \quad V_2 = (h,2,h,2)$

$V_3 = (1, 1+h, 1, 2h)$

Appartengono tutti ad $\mathbb{R}^4$
anche $h \in \mathbb{R}^4$

Per quale valore di h il vettore $V = (4,1,4,2)$ è una combinazione lineare di v_1, v_2, v_3

$v = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} h \\ 2 \\ h \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+h \\ 1 \\ 2h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_2 \\ 2\lambda_2 + (1+h)\lambda_3 \\ \lambda_1 + h\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_2 + 2h\lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_2 = 4 \\ 2\lambda_2 + (1+h)\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + h\lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ 2\lambda_2 + 2h\lambda_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1+h & 1 \\ 1 & h & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2h & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 4 \\ 0 & 1 & h & 1 \\ 0 & 0 & 1-h & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Discussione pivot $\quad 1-h = 0 \longrightarrow +h = +1$

Se $h = 1$ allora $\quad rk\, A = 2 \quad rk\, A|B = 3$

$rk\, A \neq rk\, A|B$ quindi Rouche - Capelli ci dice che non c'è soluzione

se $h \neq 1$ allora $rkA = 3$ $n = 3$
esiste una sola soluzione

Quindi per valori di $h \neq 1$ il sistema ha soluzione

Esercizio numero 3

$v_1, v_2, v_3 \in V$ lin ind

Mostrare $\{ v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1 \}$ è lin ind ?

$$\underbrace{W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle}_{V} \leftrightarrow R^3$$

$v_1 - v_2 \leftrightarrow (1, -1, 0)$

$v_2 - v_3 \leftrightarrow (0, 1, -1) \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ essendo 3x3 il rank è massimo se il det $\neq 0$ essendo quadrata possiamo usare Sarrus

$v_3 - v_1 \leftrightarrow (-1, 0, 1)$

$r_3 = -r_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \det = 0 \qquad 0 \quad 1 \quad 1$$

$\Downarrow$

$\{ v_1, v_2, v_3 \}$ lin. dip

$\Downarrow$

Quindi $\{ v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1 \}$ è linearmente dipendente

Esercizio numero 9

1) $V = \langle (1,2,3), (0,1,2), (0,0,1), (1,1,1) \rangle$

$(1,2,3) = (0,1,2) + (1,1,1)$

$V' = \langle (1,1,1), (0,1,2), (0,0,1) \rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

avendo il rank massimo è linearmente indipendente

Si poteva fare anche risolvendo questa matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10 n 3

$\{(1,1,0,0),(3,0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

sono linearmente indipendenti perché:

$\lambda(1,1,0,0) = (\lambda,\lambda,0,0) \neq (3,0,0,1)$

nessuno dei 2 può essere scritto come combinazione lineare dell' altro

non è un' insieme di generatori perché i vettori generati sarebbero del tipo $(\lambda,\lambda,0,\lambda)$ e quindi non può generare tutti i vettori $\in \mathbb{R}^4$

Quali sono i vettori che lo rendono una base di $\mathbb{R}^4$. Ne posso aggiungere 2 perché $\underbrace{n}=4$ $\mathbb{R}^4$

- Aggiungendo $(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$

Verifichiamo se sono lin ind

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il rank è massimo quindi è linearmente indipendente ciò ci conferma che è una base

Esercizio 10 n 4

$V: \{(2,1,0),(0,3,1),(2,4,1),(1,2,3),(3,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Sono linearmente dipendenti perché il numero di vettori è 5 e la dimensione è 3

Quali sono quelli inutili

togliamo $(2,4,1)$ perché è la combinazione di $(2,1,0)$ e $(0,3,1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk = 3$ è massimo quindi i vettori $\langle (1,2,3),(0,1,2),(0,0,1) \rangle$ sono una base

$V: \{(2,1,0),(0,3,1),(2,4,1),(1,2,3),(3,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

togliamo $(2,4,1)$ perchè è la combinazione di $(2,1,0)$ e $(0,3,1)$

$V: \{(2,1,0)\,(0,3,1),(1,2,3),(3,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 18 - 1 = -15 \neq 0$$

Esercizio 11

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$\dim Ker(A) =$

$$rk\,A + \underbrace{null(A)}_{\dim Ker(A)} = 3$$

Ci serve il rango

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk\,A = 1$

$null(A) = 2$

$\dim Ker(A) = 2$

Quale è la base associata alla prima riga?

$$\left\{ 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 0 \right. \quad \longrightarrow \quad 2x_1 + 3x_3 = x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ker\,A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$