SUCCESSIONI DI NUMERI REALI

Prime definizioni. Una successione di numeri reali è una funzione reale definita in $\mathbf{N}, f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Se $n \in \mathbf{N}$, si usa la notazione $a_n = f(n)$, in tal modo la successione viene identificata con l'insieme dei suoi elementi : $\{a_n\}$. L'elemento generico a_n viene detto elemento di posto (o di indice) n. Si dice che la successione verifica *definitivamente* (nel seguito, **D**) una condizione P se esiste $\alpha \in \mathbf{N}$ tale che, per ogni $n > \alpha$, l'elemento a_n verifica P. Ad esempio, la successione $\{n-4\}$ è definitivamente positiva. Osserviamo che, se due condizioni sono verificate definitivamente, ad esempio una per $n > \alpha$ e una per $n > \beta$, per $n > \max(\alpha, \beta)$ valgono entrambe. Ad esempio, si ha $n^2 - 4 > 0$ per $n > 2$ e $n^2 - 4 > 5$ per $n > 3$: dunque, per $n > 3$ le due condizioni valgono simultaneamente. La successione è detta limitata se lo è l'insieme dei suoi termini, ovvero se esistono $h, k \in \mathbf{R}$ tali che $h \leq a_n \leq k$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ha quindi $\{a_n\} \subseteq [h, k]$. I concetti di minimo, massimo, estremo superiore ed inferiore di una successione coincidono con quelli relativi all'insieme dei suoi termini. Ad esempio, il minimo della successione $\{n-1\}$ è $a_1 = 2$.

PROPOSIZIONE. Una successione **D** limitata è limitata.

Dimostrazione. Se si ha $h \leq a_n \leq k$ per ogni $n > \alpha$, posto $h' = \min\{h, a_1, \cdots, a_\alpha\}$, $k' = \max\{k, a_1, \cdots, a_\alpha\}$, si ha $h' \leq a_n \leq k'$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Successioni regolari. Introduciamo ora il concetto fondamentale di limite di una successione.

1) Sia l un numero reale. Si dice che la successione $\{a_n\}$ *converge* o *tende* ad l o che l è il *limite* della successione, e si scrive $a_n \to l$ o $\lim\ a_n = l$ se è verificata la seguente condizione:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \alpha \in N : n > \alpha \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

ovvero, se, dato un qualunque intorno di l, **D** i termini della successione appartengono a tale intorno: se $n > \alpha$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \iff l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$.

Se $l = 0$, la successione è detta *infinitesima* o, semplicemente, *un infinitesimo.*

Ad esempio, si verifica facilmente che una successione costante $a_n = k$ tende a k; $\frac{1}{n} \to 0$.

Si ha un risultato fondamentale, che è basato sulla seguente proprietà dell'insieme $\mathbf{R}$: dati due numeri reali distinti a e b, esistono un intorno di a e un intorno di b disgiunti.

TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE. Se una successione converge, il suo limite è unico.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $a_n \to l$ e $a_n \to L$, con, ad esempio, $l < L$. Scelto ε tale che $0 < \varepsilon < \frac{L-l}{2}$, $\mathbf{D}$ si ha $a_n < l+\varepsilon < L-\varepsilon < a_n$, assurdo.

Altri notevoli risultati sono i seguenti:

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. Se $a_n \to l > 0$ (risp. $l < 0$), allora $\mathbf{D}$ si ha $a_n > 0$ (risp. $a_n < 0$).

Dimostrazione. Supponiamo $l > 0$. Scelto ε tale che $0 < \varepsilon < l$, $\mathbf{D}$ si ha $a_n > l - \varepsilon > 0$. Il caso $l < 0$ si prova in modo simile.

Generalizzando questo risultato, possiamo affermare che se $a_n \to l$ e $h < l$ (risp. $k > l$), $\mathbf{D}$ si ha $a_n > h$ (risp. $a_n < k$).

TEOREMA DI CONFRONTO PER SUCCESSIONI CONVERGENTI. Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $a_n \to l$, $c_n \to l$, allora $b_n \to l$.

Dimostrazione. Dato che $\mathbf{D}$ si ha sia $l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$ che $l-\varepsilon < c_n < l+\varepsilon$, $\mathbf{D}$ si avrà $l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$.

2) Si dice che la successione $\{a_n\}$ *diverge* o *tende* a $+\infty$ (risp. $-\infty$), e si scrive $a_n \to +\infty$ o $\lim\ a_n = +\infty$ (risp. $-\infty$) se è verificata la seguente condizione:

$$\forall k > 0 \ \ \exists \alpha \in N : n > \alpha \Rightarrow a_n > k \ \ (a_n < -k)$$

ovvero, i termini della successione sono $\mathbf{D}$ maggiori (risp. minori) di qualsivoglia numero assegnato: se $n > \alpha$ si ha $a_n > k$ (risp. $a_n < -k$).

Ad esempio, $n \to +\infty$; $-n \to -\infty$.

Anche per la divergenza vale l'unicità del limite. Il teorema della permanenza del segno si può esprimere dicendo che i termini di una successione divergente a $+\infty$ $(-\infty)$ sono $\mathbf{D}$ positivi (negativi). Possiamo concludere che una successione di numeri positivi può tendere ad un limite positivo, a zero o a $+\infty$, una successione di numeri negativi può tendere ad un limite negativo, a zero o a $-\infty$. Se, infatti, ad esempio, una successione di numeri positivi tendesse ad un numero negativo, i suoi termini dovrebbero essere $\mathbf{D}$ negativi, cosa impossibile.

TEOREMA DI CONFRONTO PER SUCCESSIONI DIVERGENTI. Se $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $a_n \to +\infty$, allora $b_n \to +\infty$; se $b_n \to -\infty$, allora $a_n \to -\infty$.

Dimostrazione. Se $a_n \to +\infty$, allora **D** si ha $a_n > k$, ne segue che $b_n \geq a_n > k$; l'altro caso si prova allo stesso modo.

Possiamo dare a questo punto la seguente

Definizione. Una successione è detta *regolare* se converge o diverge.

Per una successione regolare, il limite è unico.

Una successione non regolare è anche detta *oscillante*: lo sono, ad esempio, le successioni $(-1)^n$ e $(-1)^n\ n$. Se, ad esempio, si avesse $(-1)^n \to 1$, **D** si dovrebbe avere (applicando la definizione con $\varepsilon = 1$, $0 < (-1)^n < 2$, diseguaglianza che per n dispari non è verificata. Analogamente si prova che la successione non può tendere a nessun altro limite. Per la successione $(-1)^n n$ si procede allo stesso modo.

Successioni e valore assoluto. Accanto alla successione $\{a_n\}$, consideriamo la successione $\{|a_n|\}$. Si prova che:

1) Se $a_n \to l$, allora $|a_n| \to |l|$.

Il viceversa non vale: ad esempio, posto $a_n = (-1)^n$, la successione dei valori assoluti è costante quindi convergente (ad 1) ma $\{a_n\}$ oscilla.

2) Se $a_n \to +\infty$ oppure $a_n \to -\infty$, si ha $|a_n| \to +\infty$. Il viceversa non vale: ad esempio, posto $a_n = (-1)^n\ n$, la successione dei valori assoluti vale n quindi diverge ma $\{a_n\}$ oscilla.

Se $|a_n| \to +\infty$, la successione $\{a_n\}$ è detta *infinitamente grande* e si usa la notazione $a_n \to \infty$. Chiaramente, una successione infinitamente grande a termini tutti o definitivamente positivi (negativi) diverge a $+\infty$ ($-\infty$).

Regolarità e limitatezza. Si hanno le seguenti affermazioni:

i) Una successione convergente è limitata: infatti, essa è **D** compresa, ad esempio, fra $l-1$ e $l+1$, quindi è **D** limitata. Non vale il viceversa: la successione $\{(-1)^n\}$ è limitata ma oscillante.

ii) Una successione che diverge a $+\infty$ è limitata inferiormente (dato che i suoi termini sono, ad esempio, **D** maggiori di 1) e non è limitata superiormente.

iii) Una successione che diverge a $-\infty$ è limitata superiormente (dato che i suoi termini sono, ad esempio, **D** minori di -1) e non è limitata inferiormente.

Successioni monotone. Si dice che la successione $\{a_n\}$ è *monotona* se, per ogni $n \in \mathbf{N}$ o definitivamente, verifica una delle seguenti condizioni:

1) $a_n > a_{n+1}$ (successione *strettamente decrescente*)

2) $a_n \geq a_{n+1}$ (successione *decrescente*)

3) $a_n < a_{n+1}$ (successione *strettamente crescente*)

4) $a_n \leq a_{n+1}$ (successione *crescente*)

Le successioni monotone costituiscono una categoria di successioni sicuramente regolari, ciò è stabilito dal seguente risultato, che fornisce anche il valore del limite

TEOREMA DI REGOLARITÀ (O SUL LIMITE) DELLE SUCCESSIONI MONOTONE.

i) Una successione che verifica una delle condizioni 1) e 2) tende al proprio estremo inferiore.

ii) Una successione che verifica una delle condizioni 3) e 4) tende al proprio estremo superiore.

Dimostrazione. Proviamo, per semplicità, solo il caso della divergenza.

i) Se $\inf\ a_n = -\infty$, fissato $k > 0$ il numero $-k$ non è un minorante per la successione, dunque esiste $\alpha \in \mathbf{N}$ tale che $a_\alpha < -k$. Per $n > \alpha$ si ha $a_n \leq a_\alpha < -k$, che è la tesi.

ii) Se $\sup\ a_n = +\infty$, fissato $k > 0$ il numero k non è un maggiorante per la successione, dunque esiste $\alpha \in \mathbf{N}$ tale che $a_\alpha > k$. Per $n > \alpha$ si ha $a_n \geq a_\alpha > k$, che è la tesi.

Osserviamo che per una successione crescente il termine a_1 è il minimo, per una successione decrescente è il massimo.

Operazioni con i limiti delle successioni. I seguenti risultati saranno molto utili per calcolare i limiti di successioni la cui legge di definizione è espressa mediante operazioni elementari fra altre successioni delle quali sia noto il comportamento al limite.

1) Sia $\{a_n\}$ una successione regolare e sia c un numero reale. Prendiamo in considerazione la successione $\{ca_n\}$. Si ha:

i) se $a_n \to l$, allora $ca_n \to cl$

ii) se $a_n \to +\infty$ e $c > 0$, allora $ca_n \to +\infty$

iii) se $a_n \to +\infty$ e $c < 0$, allora $ca_n \to -\infty$

iv) se $a_n \to -\infty$ e $c > 0$, allora $ca_n \to -\infty$

v) se $a_n \to -\infty$ e $c < 0$, allora $ca_n \to +\infty$

Dimostrazione. i) Se $c = 0$, la tesi è ovvia. Se $c \neq 0$, per ottenere $|ca_n - cl| < \varepsilon$ basta osservare che $\mathbf{D}$ si ha $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{|c|}$.

ii) Per ottenere $ca_n > k$ basta osservare che $\mathbf{D}$ si ha $a_n > \frac{k}{c}$.

iii) Per ottenere $ca_n < -k$ basta osservare che $\mathbf{D}$ si ha $a_n > \frac{-k}{c}$ (ricordiamo che $\frac{-k}{c} > 0$).

La iv) e la v) si provano in modo simile.

2) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ prendiamo in considerazione la successione somma $\{a_n + b_n\}$. Si ha:

I) Se $a_n \to l$ e $b_n \to L$, allora $a_n + b_n \to l + L$.

II) Se $a_n \to +\infty$ ed esiste un numero $h \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora $a_n + b_n \to +\infty$.

Dimostrazione. I) Fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$ tali che per $n > \alpha$ si ha $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ e per $n > \beta$ si ha $|b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Per $n > \max(\alpha, \beta)$ si ha $|(a_n + b_n) - (l + L)| \leq |a_n - l| + |b_n - L| < \varepsilon$.

II) Si ha $a_n + b_n \geq a_n + h$ quindi, dato che $\mathbf{D}$ si ha $a_n > k - h$, ne segue $a_n + b_n > k$.

Osserviamo che la successione $\{b_n\}$ nel caso II) può non essere regolare: ad esempio, se $a_n = n$ e $b_n = (-1)^n$, si ha $a_n + b_n \to +\infty$. Da II) si deduce la seguente tabella sul comportamento della successione somma:

i) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L$, allora $a_n + b_n \to +\infty$.

ii) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$, allora $a_n + b_n \to +\infty$.

iii) Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to L$, allora $a_n + b_n \to -\infty$.

iv) Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to -\infty$, allora $a_n + b_n \to -\infty$.

Nei casi i) e ii), la successione $\{b_n\}$ verifica la condizione richiesta in II). Nel caso iii) osserviamo che $-a_n \to +\infty$ e $-b_n \to -L$ quindi $-(a_n + b_n) \to +\infty$ e la tesi segue da iii) di 1). Il caso iv) si tratta allo stesso modo.

Infine, se una delle due successioni diverge a $+\infty$ e l'altra a $-\infty$, si ha una *forma indeterminata*, questo significa che si possono avere molte situazioni diverse quindi sarà necessario trattare ogni caso in modo diverso. Esempi:

$(n+l)+(-n) \to l$; $2n+(-n) \to +\infty$; $n+(-2n) \to -\infty$; $\{(n+(-1)^n)+(-n)\}$ oscilla.

I risultati contenuti nei casi 1) e 2) sono utili per studiare successioni del tipo $\{ca_n + c'b_n\}$ (combinazione lineare).

3) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ prendiamo in considerazione la successione prodotto $\{a_n\, b_n\}$. Si ha:

I) Se $a_n \to l$ e $b_n \to L$, allora $a_n\, b_n \to l\, L$.

II) Se $a_n \to 0$ e $\{b_n\}$ è limitata, allora $a_n\, b_n \to 0$.

III) Se $a_n \to +\infty$ ed esiste un numero positivo $h \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora $a_n\, b_n \to +\infty$.

Osserviamo che la successione $\{b_n\}$ nel caso II) può non essere regolare: ad esempio, se $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = (-1)^n$, si ha $a_n\, b_n \to 0$.

Dai risultati precedenti si deduce la seguente tabella sul comportamento della successione prodotto:

i) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L > 0$, allora $a_n\, b_n \to +\infty$.

ii) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$, allora $a_n\, b_n \to +\infty$.

iii) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L < 0$, allora $a_n\, b_n \to -\infty$.

iv) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty$, allora $a_n\, b_n \to -\infty$.

v) Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to L > 0$, allora $a_n\, b_n \to -\infty$.

vi) Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to -\infty$, allora $a_n\, b_n \to +\infty$.

vii) Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to L < 0$, allora $a_n\ b_n \to +\infty$.

A titolo di esempio, proviamo i) e v). i) segue dal teorema III) dato che $\{b_n\}$ ha limite positivo quindi h esiste grazie al Teorema della permanenza del segno. Per provare v), osserviamo che si ha $-a_n \to +\infty$ quindi $-a_n b_n \to +\infty$ per i) e la tesi segue da iii) di 1).

Infine, se una delle due successioni diverge e l'altra tende a 0 si ha una *forma indeterminata*. Esempi:

$(l\ n)\frac{1}{n} \to l$; $n^2\ \frac{1}{n} \to +\infty$; $\{n\ \frac{(-1)^n}{n}\}$ oscilla.

4) Sia $\{a_n\}$ una successione regolare e **D** non nulla, prendiamo in considerazione la successione reciproca $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$. Si possono dimostrare i seguenti risultati:

I) Se $a_n \to l \neq 0$, allora $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{l}$.

II) Se $a_n \to 0$, allora $\frac{1}{a_n} \to \infty$.

III) Se $a_n \to \infty$, allora $\frac{1}{a_n} \to 0$.

5) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, con $b_n \neq 0$ **D**, prendiamo in considerazione la successione quoziente $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$. Essa viene studiata utilizzando i risultati visti ai punti 3) e 4), scrivendola nella forma $a_n\ \frac{1}{b_n}$. Si ha una forma indeterminata se tale prodotto si presenta nella forma $0 \cdot \infty$, quindi se entrambe le successioni sono infinitesime o infinitamente grandi.

Riassumendo, le forme indeterminate che abbiamo finora trovato sono: $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Limiti notevoli. Alcune successioni sono espresse mediante funzioni elementari, qui vediamo le più comuni.

1) Successione potenza. $\{n^x\}$, $x \in \mathbf{R}$. Se $x = 0$, la successione è costante. Se $x > 0$, si ha $n^x \to +\infty$, infatti $n^x > k$ equivale a $n > k^{\frac{1}{x}}$, che **D** è vera. Se $x < 0$, si ha $n^x = \frac{1}{n^{-x}} \to 0$.

2) Successione in forma di polinomio. $x_n = a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p$. Per quanto visto in 1), la successione si presenta normalmente nella forma indeterminata $\infty - \infty$. Si procede nel seguente modo:

$x_n = n^p(a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p})$. Si ha $n^p \to +\infty$ mentre la quantità fra parentesi tende ad a_0 quindi $x_n \to +\infty$ se $a_0 > 0$, $x_n \to -\infty$ se $a_0 < 0$.

3) Successione in forma di funzione razionale. $x_n = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q}$. Per quanto visto in 2), la successione si presenta normalmente nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Procedendo come in 2) si ottiene:

$x_n = n^{p-q}\ \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_q}{n^q}}$ quindi: se $p = q$ si ha $x_n \to \frac{a_0}{b_0}$; se $p < q$ si ha $x_n \to 0$; se $p > q$ si ha $x_n \to +\infty$ se a_0, b_0 hanno lo stesso segno; $x_n \to -\infty$ se a_0, b_0 hanno segno opposto.

ESEMPI:
$\frac{2n^2+5n+3}{n^2+8} \to 2$
$\frac{2n^2+5n+3}{n^5+8} \to 0$
$\frac{2n^2+5n+3}{3-n^7} \to 0$
$\frac{2n^2+5n+3}{n+8} \to +\infty$
$\frac{2n^2+5n+3}{8-3n} \to -\infty$
$\frac{2n^2-5n^3+3}{n^2+8} \to -\infty$
$\frac{2n^2-5n^3+3}{8-n^2} \to +\infty$

4) Successione geometrica. $\{a^n\}$, con $a \in \mathbf{R}$. Si prova facilmente per esercizio che tale successione ha il seguente comportamento al limite:

$a > 1 \Rightarrow a^n \to +\infty$
$a = 1 \Rightarrow a^n \to 1$ (è costante)
$0 < a < 1 \Rightarrow a^n \to 0$
$a = -1 \Rightarrow a^n$ è oscillante
$a < -1 \Rightarrow a^n \to \infty$ ed è oscillante

5) Successioni composte mediante funzioni elementari. Proveremo in seguito la seguente

PROPOSIZIONE 1. Se $f : X \to \mathbf{R}$ è una funzione elementare, se $\{a_n\} \subseteq X$, $a_n \to l$ e $l \in X$, allora si ha $f(a_n) \to f(l)$.

Ad esempio, se $a_n \to \pi$, si ha $\cos a_n \to \cos \pi$.

Vediamo ora alcuni particolari casi di successioni composte mediante funzioni elementari.

α) Sia $\{x_n\}$ una successione regolare e sia a un numero positivo e diverso da 1. Studiamo la successione $\{a^{x_n}\}$. Per la Proposizione 1, se $x_n \to l$, si ha $a^{x_n} \to a^l$. Se $\{x_n\}$ diverge si deve distinguere se $a > 1$ oppure $0 < a < 1$. Si ha:

i) $a > 1, x_n \to +\infty \Rightarrow a^{x_n} \to +\infty$
ii) $a > 1, x_n \to -\infty \Rightarrow a^{x_n} \to 0$
iii) $a < 1, x_n \to +\infty \Rightarrow a^{x_n} \to 0$
iv) $a < 1, x_n \to -\infty \Rightarrow a^{x_n} \to +\infty$

Dimostrazione. i) $a^{x_n} > k$ equivale a $x_n > \log_a k$, che è **D** vera dato che $x_n \to +\infty$.

ii) Basta osservare che $a^{x_n} = \frac{1}{a^{-x_n}}$

iii), iv) Basta osservare che $a = \frac{1}{\frac{1}{a}}$ e $\frac{1}{a} > 1$.

β) Sia $\{x_n\}$ una successione regolare di numeri positivi e sia a un numero positivo e diverso da 1. Studiamo la successione $\{\log_a\ x_n\}$. Per la Proposizione 1, se $x_n \to l > 0$, si ha $\log_a\ x_n \to \log_a\ l$. Se $\{x_n\}$ diverge a $+\infty$ oppure tende a 0 si deve distinguere se $a > 1$ oppure $0 < a < 1$. Si ha:

i) $a > 1, x_n \to +\infty \Rightarrow \log_a\ x_n \to +\infty$

ii) $a > 1, x_n \to 0 \Rightarrow \log_a\ x_n \to -\infty$

iii) $a < 1, x_n \to +\infty \Rightarrow \log_a\ x_n \to -\infty$

iv) $a < 1, x_n \to 0 \Rightarrow \log_a\ x_n \to +\infty$

Dimostrazione. i) $\log_a\ x_n > k$ equivale a $x_n > a^k$, che è **D** vera dato che $x_n \to +\infty$

ii) Basta osservare che $\log_a x_n = \log_a\ \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = -\log_a\ \frac{1}{x_n}$

iii), iv) Basta osservare che $\log_a x_n = \left(\log_a\ \frac{1}{a}\right)\left(\log_{\frac{1}{a}}\ x_n\right) = -\log_{\frac{1}{a}}\ x_n$

γ) Successione del tipo $(a_n)^{b_n}$ essendo $a_n > 0$ per ogni n. Questa successione si scrive nella forma $(a_n)^{b_n} = e^{\log\ (a_n)^{b_n}} = e^{b_n\ \log\ a_n}$ e in questa forma ci si può ricondurre ai casi α, β. Si avranno forme indeterminate se il prodotto $b_n\ \log\ a_n$ si presenta nella forma $0 \cdot \infty$ e questo accade se $b_n \to 0$ e $\log\ a_n \to \infty$ o viceversa. Ricordiamo che:

$\log\ a_n \to \infty$ significa che $a_n \to +\infty$ oppure che $a_n \to 0$

$\log\ a_n \to 0$ significa che $a_n \to 1$.

In definitiva, si avranno tre forme indeterminate di tipo esponenziale: $(+\infty)^0$; 0^0; 1^∞.

Il numero e**.** Consideriamo la successione $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, essa si presenta nella forma indeterminata 1^∞. Si può provare che essa è strettamente crescente e limitata superiormente (precisamente, 3 è un maggiorante). Essa dunque converge, si definisce il numero e ponendolo uguale al suo limite. Si tratta di un numero irrazionale e questo fatto è interessante se si osserva che i numeri x_n sono tutti razionali.

Si hanno i seguenti "limiti dedotti dal numero e".

i) Siano a un numero positivo diverso da 1 e $x_n \to \infty$. Allora si ha:

$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$

da cui segue, in particolare, se $x_n = \frac{n}{x}, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$:

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x \to e^x$, dato che la quantità fra parentesi quadre tende ad e

ii) Siano a un numero positivo diverso da 1 e $x_n \to 0$. Allora si ha:

$\frac{\log_a(1+x_n)}{x_n} \to \log_a e$; in particolare, per $a = e$, $\frac{\log(1+x_n)}{x_n} \to 1$

$\frac{a^{x_n}-1}{x_n} \to \log a$; in particolare, per $a = e$, $\frac{e^{x_n}-1}{x_n} \to 1$

iii) sia $\alpha \in \mathbf{R}$, si ha $\frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} \to \alpha$

Si hanno, infine, i seguenti limiti in cui sono presenti le funzioni trigonometriche. Premettiamo che, per ogni $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si ha $|\sin x| \le |x| \le |\tan x|$. Sia $a_n \to 0$, allora la successione $\{\frac{\sin a_n}{a_n}\}$ si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Dato che $a_n \to 0$, **D** si ha $|a_n| < \frac{\pi}{2}$, quindi

$|\sin a_n| \leq |a_n| \leq |\tan a_n|$ da cui, dividendo per $|\sin a_n|$ e passando ai reciproci, $|\cos a_n| \leq |\frac{\sin a_n}{a_n}| \leq 1$. Osservando che, se $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tutti gli argomenti dei valori assoluti presenti in tale catena di diseguaglianze sono positivi, essa equivale a $\cos a_n \leq \frac{\sin a_n}{a_n} \leq 1$, e, applicando il teorema di confronto, da qui segue che $\frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$. Da questo risultato si deduce immediatamente che

$\frac{\tan a_n}{a_n} \to 1$ e si può provare che anche $\frac{\arcsin a_n}{a_n} \to 1$ e $\frac{\arctan a_n}{a_n} \to 1$.

Consideriamo infine i seguenti due limiti:

$\frac{1-\cos a_n}{a_n} = \frac{1-\cos^2 a_n}{a_n(1+\cos a_n)} = \frac{\sin a_n}{a_n} \frac{\sin a_n}{1+\cos a_n} \to 0$

e, procedendo analogamente

$\frac{1-\cos a_n}{(a_n)^2} \to \frac{1}{2}$

Successioni estratte. Data una successione $\{a_n\}$, sia data un'altra successione $\{n_k\}$ strettamente crescente, con $n_k \in \mathbf{N}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. La funzione composta $\{a_{n_k}\}$ è detta *successione estratta* da $\{a_n\}$ mediante la legge $\{n_k\}$. In pratica, essa è costituita dai soli elementi della prima successione aventi indici del tipo n_k.

Esempi:

- se $n_k = 2k$, si ottiene la successione dei termini di posto pari
- se $n_k = 2k-1$, si ottiene la successione dei termini di posto dispari
- se $n_k = r+k$, avendo fissato $r \in \mathbf{N}$, si ottiene la successione ottenuta sopprimendo i primi r termini.

TEOREMA DI REGOLARITÀ DELLE SUCCESSIONI ESTRATTE. Se $\{a_n\}$ è regolare, ogni sua estratta ha il suo stesso limite.

Il viceversa non vale: ad esempio, posto $a_n = (-1)^n$, la successione dei termini di posto pari è costante quindi convergente ma $\{a_n\}$ oscilla.

Possiamo dunque concludere che se una successione ha due estratte aventi limiti diversi, essa oscilla.

Si hanno tuttavia i seguenti risultati:

1) se $\{a_{r+k}\}$ è regolare, anche $\{a_n\}$ ha il suo stesso limite.

2) se $\{a_{2k}\}$ e $\{a_{2k-1}\}$ hanno lo stesso limite, anche $\{a_n\}$ ha il loro stesso limite.

OSSERVAZIONE. Dal paragrafo precedente si deduce che, data una successione $\{a_n\}$, è possibile prendere in considerazione due nuove successioni, quella formata dai soli termini di posto pari di $\{a_n\}$ e quella formata dai soli termini di posto dispari. Se esse hanno lo stesso limite, allora $\{a_n\}$ ha tale limite; se esse hanno limiti diversi, $\{a_n\}$ non è regolare. Ad esempio, sia $\{x_n\}$ una successione regolare di numeri tutti positivi, e poniamo $a_n = (-1)^n x_n$. Se $x_n \to 0$, si ha che anche $a_n \to 0$. Se $x_n \to l > 0$, per n pari si ha $a_n = x_n \to l$, per n dispari si ha $a_n = -x_n \to -l$ quindi $\{a_n\}$ non è regolare.

Lo stesso ragionamento si ripete se $x_n \to +\infty$. Ad esempio, le successioni $(-1)^n \frac{2n+1}{n+4}$ e $(-1)^n \frac{n^4+1}{n+3}$ non sono regolari, invece $(-1)^n \frac{2n}{n^4+5}$ tende a zero.

Confronto fra infiniti e fra infinitesimi .

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni infinitamente grandi, dette anche due infiniti. Si dice che sono dello stesso ordine se il loro rapporto tende ad un limite diverso da zero, si dice che $\{a_n\}$ è di ordine superiore rispetto a $\{b_n\}$ se il loro rapporto diverge. Ad esempio, si può far vedere che n^n è di ordine superiore rispetto ad $n!$, $n!$ è di ordine superiore rispetto ad a^n $(a > 1)$, a^n $(a > 1)$ è di ordine superiore rispetto a n^x $(x > 0)$.

Siano ora $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due infinitesimi. Si dice che sono dello stesso ordine se il loro rapporto tende ad un limite diverso da zero, si dice che $\{a_n\}$ è di ordine superiore rispetto a $\{b_n\}$ se il loro rapporto tende a zero. Ad esempio, per quanto visto nel paragrafo sui limiti notevoli, se $a_n \to 0$, si ha che $\sin a_n$ e a_n sono dello stesso ordine, $1 - \cos a_n$ è di ordine superiore rispetto ad a_n ma $1 - \cos a_n$ e $(a_n)^2$ sono dello stesso ordine. Ciò si esprime anche dicendo che $1 - cosa_n$ è di ordine 2 rispetto ad a_n: in generale, se a_n e $(b_n)^p$ sono dello stesso ordine, si dice che a_n è di ordine p rispetto a b_n.

Successioni definite per ricorrenza. Una successione si dice definita per ricorrenza se viene dato il suo primo termine e viene fornita una legge che calcola ciascun termine in funzione del precedente. Data, cioè, una funzione reale di variabile reale f, che supporremo sia una funzione elementare, la successione si presenta nella forma $a_{n+1} = f(a_n)$. Ad esempio:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n} \end{cases}$$

Per una tale successione, solitamente, si procede nel seguente modo:

- si studia la monotonia

- si individua quel numero l che potrebbe essere l'estremo inferiore (o superiore)

- da quanto sopra segue che $l = \lim a_n$, ma allora si ha anche $l = \lim a_{n+1}$ (grazie a quanto detto sulle successioni estratte)

- si osserva che $a_{n+1} = f(a_n) \to f(l)$

- per l'unicità del limite si deve avere $f(l) = l$. Si risolve l'equazione $f(x) = x$ e, fra le sue eventuali soluzioni, si cerca un eventuale numero l che possa essere l'estremo inferiore (o superiore) della successione. Se non c'è un tale l, la successione diverge.