$p \vee q \vee (r \wedge s)$

p	q	r	s	S_1 = r and s	S_1 or q or p
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1

trasformare in CNF e DNF le seguenti formule

$$p \land (q \lor (\neg p \lor \neg q))$$

$$\downarrow$$

$$(p \land q) \lor (p \land s \land (\neg p \lor \neg q))$$

$$\downarrow$$

$$(p \land q) \lor \cancel{(p \land s \land \neg p)} \lor (p \land s \land \neg q)$$

$$(p \land q) \lor (p \land s \land \neg q) \rightarrow \text{DNF}$$

$$(p \lor p) \land (p \lor s) \land (p \lor \neg q) \land (q \lor p) \land (q \lor s) \land \cancel{(q \lor \neg q)}$$

$$p \land (p \lor s) \land (p \lor \neg q) \land (q \lor p) \land (q \lor s)$$

$$(A\setminus B)\cup(C\setminus B)=(A\cup C)\setminus B$$

$$\begin{array}{ccc} " & \supseteq & " \\ " & \subseteq & " \end{array}\Bigg\}$$ dimostrando queste cose dimostriamo che i membri sono uguali

$(\subseteq)$ $x\in(A\setminus B)\cup(C\setminus B)\Rightarrow x\in A$ e $x\notin B$ oppure $x\in C$ e $x\notin B$

$\Rightarrow x\in A\cup C$ e $x\notin B\Rightarrow x\in(A\cup C)\setminus B\Rightarrow (A\setminus B)\cup(C\setminus B)\subseteq(A\cup C)/B$

$(\supseteq)$ $x\in(A\cup C)\setminus B\Rightarrow x\in A\cup C$ e $x\notin B\Rightarrow x\in A$ e $x\notin B$ oppure $x\in C$ e $x\notin B\Rightarrow x\in A\setminus B$ oppure $x\in C\setminus B\Rightarrow$ $x\in(A\setminus B)\cup(C\setminus B)\Rightarrow (A\cup C)\setminus B\subseteq(A\setminus B)\cup(C\setminus B)$

esprimono lo stesso concetto quindi la formula iniziale è vera

---

$$(A\setminus C)\cap(B\setminus C)\cap(A\setminus B)=\emptyset$$

Supponiamo $\exists x\in(A\setminus C)\cap(B\setminus C)\cap(A\setminus B)$

se $x\in A\setminus C\Rightarrow x\in A$

se $x\in B\setminus C\Rightarrow x\in B$

però $x\notin(A\setminus B)$ quindi

$\cancel{*}\Rightarrow\nexists x\in(A\setminus C)\cap(B\setminus C)\cap(A\setminus B)$

per assurdo

Questi tipo di esercizi si possono risolvere con le tavole di verità

$A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$ $\qquad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

A	B	C	$B\setminus C$	$C\setminus B$	$B\Delta C=(B\setminus C)\cup(C\setminus B)$	S_1: $A\setminus(B\Delta C)$	S_2: $(B\Delta C)\setminus A$	$S_1\cup S_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1

A	B	C	$A\setminus B$	$B\setminus A$	$A\Delta B$	S_1: $C\setminus(A\Delta B)$	S_2: $(A\Delta B)\setminus C$	$S_1\cup S_2$: $(A\Delta B)\Delta C$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1

Le colonne evidenziate sono uguali quindi l' equivalenza $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$ è stata dimostrata

Trasforme in CNF e DNF : $\neg(p \Rightarrow (q \vee (r \vee s)))$ (SLIDE 30)

$p \Rightarrow q = \neg p \vee q$

$\neg(\neg p \vee (q \wedge (r \vee s)))$

$p \wedge \neg(q \wedge (r \vee s))$

$p \wedge \neg q \vee \neg(r \vee s)$

$p \wedge \neg q \vee \neg r \wedge \neg s$

CNF

$p \wedge \neg q \vee \neg r \wedge \neg s$

$p \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg s)$

DNF

$p \wedge \neg q \vee (\neg r \wedge \neg s)$

$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r \wedge \neg s)$

SLIDE 64

$(A \setminus B) \cap (C \setminus B) = (A \cap C) \setminus B$

$(\subseteq)$ Sia $x \in (A \setminus B) \cap (C \setminus B) = (A \cap C) \setminus B \Rightarrow x \in A$ e $x \in C$ ma $x \notin B$
$\Rightarrow x \in (A \cap B) \setminus B$

$(\supseteq)$ Sia $x \in (A \cap C) \setminus B \Rightarrow x \in A$ e $x \in C$ e $x \notin B \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ e
$x \in (C \setminus B) \Rightarrow x (A \setminus B) \cap (C \setminus B)$

Il primo membro è contenuto nel secondo e viceversa
quindi sono uguali

$$(A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

$\supseteq$ Sia $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A) \Rightarrow x\in A$ e $x\notin B$ $\Rightarrow x\in(A\cup B)$ e $x\notin(A\cap B)$

$x\in B$ e $x\notin A$

$\Rightarrow x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$\subseteq$ Sia $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B) \Rightarrow x\in(A\cup B)$ e $x\notin(A\cap B)$

$\Rightarrow$ $\underline{x\in A \text{ opp } x\in B}$ e $x\in A\cap B$

se $x\in A$ $x\notin B$ $\rightarrow$ $x\in(A\setminus B)$ opp $x\in(B\setminus A) \Rightarrow x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

se $x\in B$ $x\notin A$

RIFL $(x,x) \in R$

SIMM $(x,y) \in R$ $(y,x) \in R$

TRANS $(x,y) \in R$ $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$R \doteq \{(1,2),(2,2),(3,4),(4,3)\}$

non è riflessiva perchè non sono tutti x,x

non è simmetrica perchè non tutti hanno il loro simmetrico

$R = \{(\underset{x}{1},\underset{y}{2}),(\underset{y}{2},\underset{z}{5}),(\underset{x}{1},\underset{z}{5})\}$

questo è un'insieme transitivo

R è riflessiva, simm, trans

S = // // // /

$R \cap S$ è rifl?, simm? e trans?

$R \cup S$ è // // //

verifica riflessività

$(x,x) \in R$ e $(x,x) \in S \Rightarrow (x,x) \in R \cup S \Rightarrow R \cup S$ è riflessiva

$\Rightarrow (x,x) \in R \cap S \Rightarrow R \cap S$ è riflessiva

verifica simmetria

$(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$

$(x,y) \in S$ e $(y,x) \in S$

$\Rightarrow (x,y) \in R \cap S$ e $(y,x) \in R \cap S \Rightarrow R \cap S$ è simm

$(x,y) \in R \cup S$ e $(y,x) \in R \cup S \Rightarrow R \cup S$ è simm

Se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R \to$ sono trans

Se $(x,y) \in S$ e $(y,z) \in S \Rightarrow (x,z) \in S \to$ sono trans

$(x,y) \in R \cap S$ e $(y,z) \in R \cap S \Rightarrow (x,z) \in R \cap S \Rightarrow R \cap S$ è trans

$R \cup S$ è transitiva? Sappiamo che è falsa ?? quindi controesempio

$R = \{(\underset{x}{1},\underset{y}{2}),(\underset{y}{2},\underset{z}{3}),(\underset{x}{1},\underset{z}{3})\} \to$ trans

$R \cup S \to$??

$S = \{(\underset{x}{3},\underset{y}{4}),(\underset{y}{4},\underset{z}{5}),(\underset{x}{3},\underset{z}{5})\} \to$ trans

$$R \cup S = \{\underbrace{(1,2),(2,3),(1,3)}_{\text{fino a qua è trans}},\underbrace{(\underset{x}{3},\underset{y}{4}),(\underset{y}{4},\underset{z}{5}),(3,5)}_{\text{qua non più}}\}$$

???

SLIDE 120

R è rifl? $d(x,x) = 0 < 10 \Rightarrow (x,x) \Rightarrow R \Rightarrow$ R è riflessiva

R è simm? $d(x,y) = d(y,x) < 10 \Rightarrow (x,y) \in R,\ (y,x) \in R$

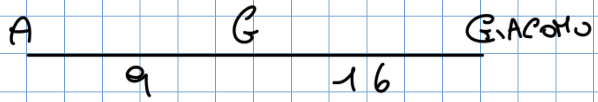
$\Downarrow$

R è simm

R è trans?

Se Aldo abita a 9 Km da Giovanni Aldo $\rightarrow R \rightarrow$ Giovanni

e se Giovanni abita a 7 Km da Giacomo Giovanni $\rightarrow R \rightarrow$ Giacomo



Aldo $\rightarrow \cancel{R} \rightarrow$ Giacomo